

1. Modèle simplifié d'un geyser

Un geyser est une source d'où jaillit de façon intermittente une quantité considérable d'eau chaude et de vapeur d'eau. Comme le montre schématiquement la Figure 1, il est composé d'une chambre souterraine (ou chaudière) remplie d'eau (liquide ou vapeur) dont la base est proche d'une source de chaleur constituée de magma en fusion, d'une longue cheminée rigide reliant la base de la chaudière à la surface, et d'un réseau d'infiltration de l'eau de surface qui permet de remplir d'eau la chambre par sa base.

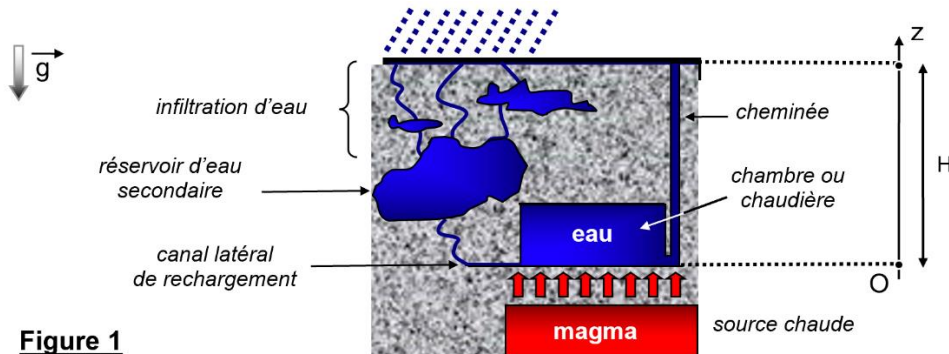


Figure 1

Le geyser peut être décrit au moyen du cycle suivant (Figure 2) :

- (0) : À l'état initial, la chambre est remplie d'eau.
- (1) : L'eau est chauffée dans la chambre par le magma jusqu'à ce qu'apparaissent les premières bulles de vapeur d'eau.
- (2) : Les bulles générées en abondance par ébullition de l'eau coalescent : elles montent dans la chambre et augmentent de volume au cours de l'ascension, puis s'accablent sur le plafond de la chambre et fusionnent en une phase vapeur unique.
- (3) : Quand la vapeur d'eau occupe la totalité de la chaudière, la pression dans la chambre est compensée par la pression hydrostatique due à la colonne d'eau de la cheminée et au réseau d'alimentation.
- (4) : L'augmentation du volume de vapeur d'eau propulse à grande vitesse l'eau de la colonne à travers de la cheminée (a).
- (5) : L'éruption entraîne une éjection à l'air libre de la colonne d'eau et de la vapeur.
- (6) : Le panache s'effondre et l'eau sous forme liquide rejoint la chambre sous l'effet de la pesanteur à travers les infiltrations du sol (b) ; les réseaux annexes d'infiltration d'eau (c) en achèvent le remplissage.
- (7) : Le cycle est terminé en revenant à l'état initial (0) ; il reprend par chauffage de la chambre.

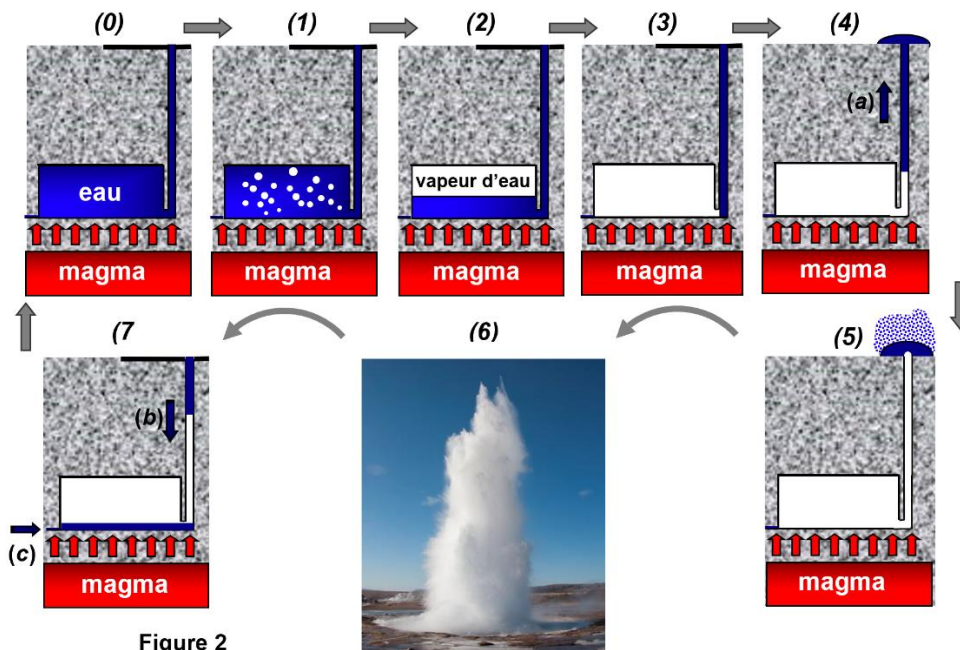


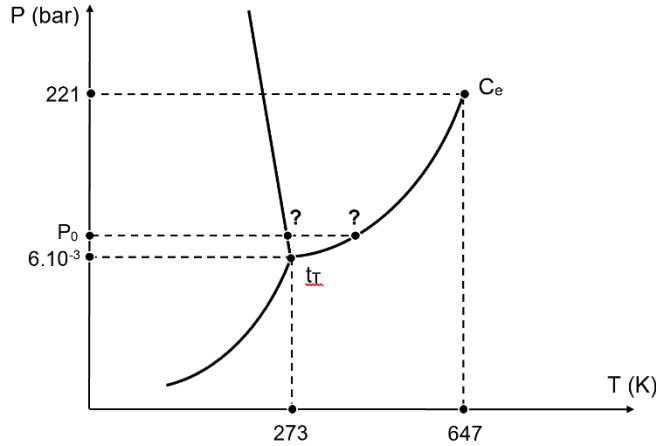
Figure 2

Le sujet s'intéresse à diverses étapes du cycle. Les parties A, B, C et D sont largement indépendantes.

A. Ébullition de l'eau dans la chambre

Diagramme d'état de l'eau

Le diagramme d'état de l'eau pure en coordonnées (P, T) est proposé en annexe. Il est constitué de trois courbes se coupant en un point donné, noté t_T et séparant trois domaines.



1. Reproduire le diagramme sur votre copie et l'annoter (nature des phases, noms des courbes frontières, points particuliers). Indiquer, en kelvin, les valeurs des températures d'ébullition et de fusion de l'eau à la pression $P_0 = 1,013 \text{ bar}$.
2. Définir la pression de vapeur saturante liquide-vapeur $P_{sat}(T)$ et indiquer où lire sa valeur sur ce diagramme.

L'enthalpie massique de changement de phases (1) \rightarrow (2) d'un corps pur, à la température T et sous la pression $P_{\acute{e}q}(T)$, peut être évaluée grâce à la relation de Clapeyron ci-dessous :

$$\ell_{1 \rightarrow 2}(T) = T \cdot (v_2 - v_1) \cdot \frac{dP_{\acute{e}q}}{dT}$$

v_1 et v_2 désignent respectivement les volumes massiques du corps pur dans les états (1) et (2). $\frac{dP_{\acute{e}q}}{dT}$ représente la valeur du coefficient directeur de la courbe séparant les domaines (1) et (2) au point considéré de coordonnées $(P_{\acute{e}q}, T)$.

3. Utiliser la relation de Clapeyron pour exprimer $\ell_{\acute{e}b}(T)$ en fonction de $T, P_{sat}(T)$ et des volumes massiques v_l et v_{vap} , respectivement de l'eau à l'état liquide et de l'eau à l'état vapeur. Proposer des ordres de grandeur pour les volumes massiques v_l et v_{vap} , et simplifier la relation donnant $\ell_{\acute{e}b}(T)$.

Soit T_0 la température d'ébullition de l'eau à la pression atmosphérique P_0 .

4. En supposant que la vapeur d'eau se comporte comme un gaz parfait et que, pour des températures d'ébullition comprises entre 0°C et 200°C , l'enthalpie massique d'ébullition $\ell_{\acute{e}b}$ de l'eau est indépendante de la température, montrer que la pression de vapeur saturante de l'eau peut s'exprimer au moyen de la relation suivante, appelée formule de Rankine :

$$\ln\left(\frac{P_{sat}}{P_0}\right) = A - \frac{B}{T}$$

Exprimer A et B en fonction de l'enthalpie massique d'ébullition $\ell_{\acute{e}b}$, de la constante R des gaz parfaits, de la température T_0 et de la masse molaire M_{eau} de l'eau. Calculer la valeur de la pression de vapeur saturante de l'eau à 150°C . Commenter la valeur obtenue.

Données : $A = 13,7$ $B = 5120 \text{ K}$

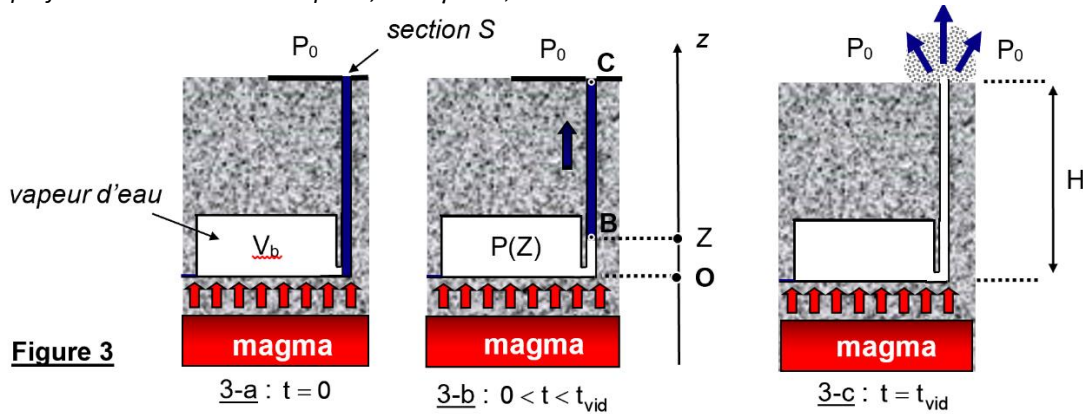
Formation d'une bulle dans l'eau

L'eau liquide est considérée comme un fluide parfait, incompressible, de masse volumique $\rho_{eau} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. En un point de ce fluide règne une pression P . À l'extrémité haute de la cheminée verticale de hauteur $H = 100 \text{ m}$, la pression atmosphérique est notée P_0 avec $P_0 \approx 1,0 \text{ bar}$. Le champ de pesanteur est uniforme, d'intensité $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

5. Lorsque l'eau liquide est au repos dans la cheminée, exprimer la pression P_H à la profondeur H dans l'eau. Calculer sa valeur.
6. À quelle condition sur $P_{sat}(T)$ une bulle de vapeur d'eau peut-elle se former à la base de la cheminée, à la profondeur H ? En déduire la valeur (en degrés Celsius) de la température d'ébullition $T_{\acute{e}b}$ de l'eau à cette profondeur ?

B. Ascension de l'eau dans la cheminée et éruption du geyser

La vapeur d'eau occupe, à l'instant $t = 0$, la totalité de la chambre de volume V_b . Sa pression est P_H (Figure 3-a). Elle se comporte comme un gaz parfait et obéit à la loi de Laplace, avec $\gamma = 1,3$.



Dans les conditions d'existence d'un geyser, l'augmentation du volume de la vapeur pour un temps $t > 0$ rend instable la colonne d'eau liquide ; il s'en suit une brutale montée de la colonne d'eau dans la cheminée de hauteur H et de section constante S jusqu'à l'éruption du geyser en C , la durée totale d'expulsion de l'eau dans la colonne étant notée t_{vid} .
 À un instant quelconque $t > 0$, on note l'altitude Z du point le plus bas de la colonne d'eau (point B) (figure 3).

Critère d'instabilité et condition d'existence du geyser

- Rappeler l'énoncé de la loi de Laplace ainsi que ses conditions d'application, et justifier son utilisation pour la vapeur d'eau contenue dans la chambre. Appliquer cette loi de Laplace entre les instants $t = 0$ et t (où $0 < t < t_{vid}$, Figure 3-b) pour exprimer la pression $P_{BG}(Z)$ au point B de cote Z dans la phase gazeuse, en interprétant l'augmentation du volume de la vapeur.
- Réaliser un développement limité de $P_{BG}(Z)$ lorsque $S \cdot Z \ll V_b$, et montrer que cette pression peut alors s'écrire :

$$P_{BG} \approx (P_0 + \rho_{eau} \cdot g \cdot H) \cdot \left(1 - \frac{\gamma \cdot S \cdot Z}{V_b}\right)$$

On rappelle que $(1 + x)^n \approx 1 + n \cdot x$ si $x \ll 1$.

L'eau chaude de la colonne est assimilée à un fluide parfait et incompressible, ce fluide se déplace selon z .

- On montre que, avec ces hypothèses et pour $0 < t < t_{vid}$, la cote Z du point B vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(H - Z) \cdot \frac{d^2Z}{dt^2} + g \cdot \left(-1 + \frac{\gamma \cdot S \cdot H}{V_b} \cdot \left(1 + \frac{P_0}{\rho_{eau} \cdot g \cdot H}\right)\right) \cdot Z = 0 \quad (1)$$

Simplifier l'équation différentielle (1) pour $Z \ll H$, c'est-à-dire à un instant proche de l'instant initial, par une équation différentielle linéaire à coefficients constants, notée (2).

- Discuter de la forme de la solution $Z(t)$ suivant la valeur du volume de la chambre V_b . Préciser le volume minimal $V_{b,min}$ de la chaudière nécessaire au déclenchement du geyser en fonction de $\gamma, \rho_{eau}, g, S, H$ et P_0 .
- Calculer la section S de la colonne pour laquelle la naissance d'un geyser est possible lorsque $V_b = 50 \text{ m}^3$ et $H = 100 \text{ m}$. En déduire le rayon maximal de la colonne permettant, dans ces conditions, une éruption.

Les solutions à l'équation différentielle (1) sont très sensibles aux conditions initiales ; elles sont représentées, pour $Z(0) = 0,1 \text{ m}$ et $(dZ/dt)_0 = 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, sur la Figure 4 ci-dessous :

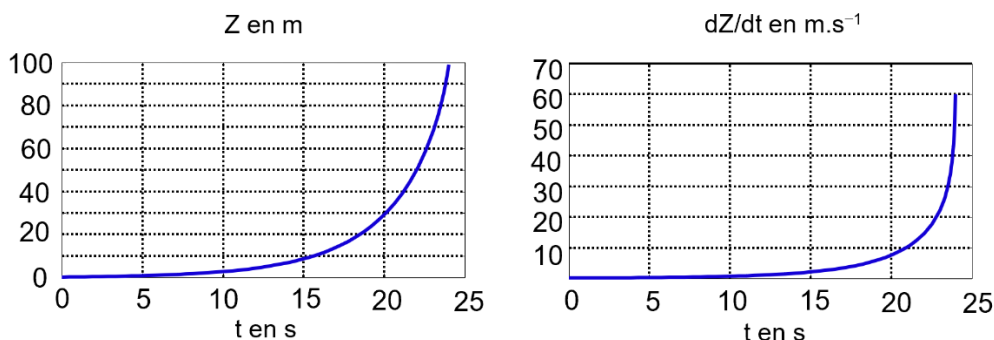


Figure 4

12. Déterminer, en utilisant ces tracés, la durée approximative d'éjection de l'eau dans la colonne. Quelle vitesse d'éjection de l'eau à la fin de l'éruption ?
13. On considère que, durant l'éruption du geyser, le phénomène est stationnaire ; et que le panache n'est constitué que d'eau liquide. En appliquant la relation de Bernoulli sur une ligne de courant entre le point C et le sommet G du panache, évaluer l'ordre de grandeur de la hauteur maximale H_{max} (par rapport à la sortie du geyser) du panache après éruption, en considérant la vitesse maximale d'éjection du panache v_{max} évaluée dans la question 13.
14. Cette hauteur de geyser n'est jamais atteinte. Citer les approximations responsables de cette sur-estimation.

C. Rechargement en eau de la chaudière par une canalisation horizontale après éruption

Dans cette section, l'eau est considérée incompressible (masse volumique ρ_{eau}) et newtonienne (viscosité dynamique η_{eau}). Son écoulement est considéré permanent et laminaire au sein d'une canalisation horizontale cylindrique de rayon R et de grande longueur L (Figure 5). Le champ de vitesses est en tout point parallèle à l'axe Ox : $\vec{v} = v(r, x) \cdot \vec{e}_x$. L'effet de la pesanteur est négligé.

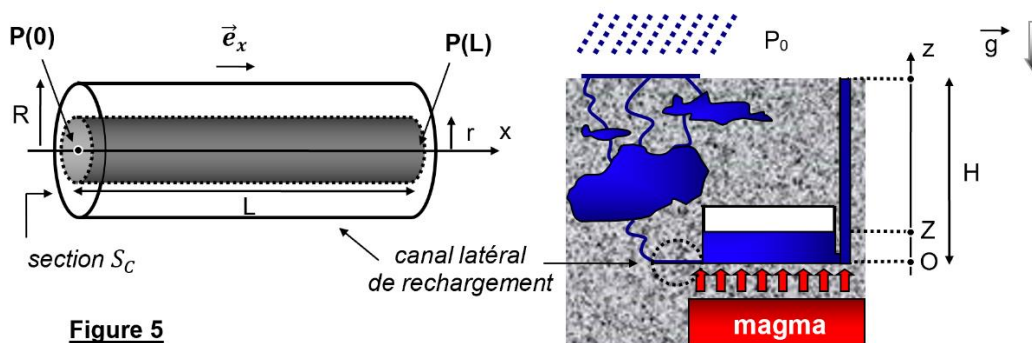


Figure 5

15. Compte tenu des hypothèses de travail, montrer que la vitesse en un point M du fluide ne dépend que de r : $\vec{v} = v(r) \cdot \vec{e}_x$.

On admet que le champ de vitesse scalaire au sein du fluide peut se mettre sous la forme :

$$v(r) = \frac{1}{4 \cdot \eta_{eau}} \cdot \frac{P(0) - P(L)}{L} \cdot (R^2 - r^2)$$

16. Établir l'expression du débit volumique Q de l'eau au sein de la canalisation en fonction de la section S_C du canal, de sa longueur L , de la viscosité dynamique η_{eau} et de la chute de pression $P(0) - P(L)$.
17. Rappeler l'expression générale de la force de viscosité s'exerçant en un point du liquide. En déduire la force de frottement subie par la canalisation de la part du fluide au rayon $r = R$.

La chambre est connectée à la fois à la cheminée et au canal horizontal de rechargement. Lors de l'éruption du geyser, l'eau s'évacue préférentiellement au travers de la cheminée plutôt qu'au travers du canal latéral de rechargement.

18. Rappeler la définition d'une résistance électrique. Établir l'expression de la résistance électrique d'un conducteur de longueur L et de section S constante.
19. Définir, puis exprimer la résistance hydraulique R_H de la canalisation de rechargement. La résistance électrique exprimée à la question 18 et la résistance hydraulique varient-elles de la même façon en fonction de la longueur et de la section ?
20. Proposer un argument pour justifier une évacuation préférentielle de l'eau à travers la cheminée verticale.

2. Vélocimétrie par effet Doppler

Afin d'évaluer les risques de sténoses vasculaires chez un patient, il faut pouvoir estimer localement la vitesse de l'écoulement du sang. Pour cela, on utilise une technique d'échographie Doppler. Dans cette technique, une sonde émet une onde ultrasonore de célérité c et de fréquence f_0 . Une hématie (globule rouge) se déplaçant à la vitesse v renvoie cette onde à une fréquence différente. Au signal réfléchi sur les hématies se superposent les signaux réfléchis sur les organes immobiles ou les tissus biologiques. Néanmoins ces derniers sont de fréquence identique à celle de la source et ne perturbent pas l'étude. La sonde à ultra-sons jouant le rôle d'émetteur et de récepteur est positionnée sur la peau et émet des ultrasons. L'onde incidente fait un angle θ avec le vaisseau à explorer.

Données : $c = 1,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$; $f_0 = 4,0 \text{ MHz}$.

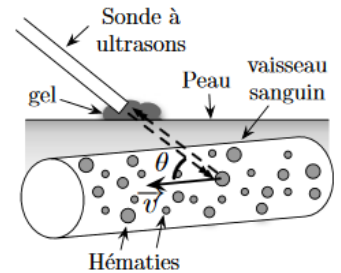


FIGURE 3 – Échographie.

1. Mesures de fréquence et vitesse des hématies

La mesure de la différence de fréquence entre le signal émis et le signal reçu donne accès à la vitesse v des hématies. Pendant la période T_0 de l'onde ultrasonore, on suppose que la distance parcourue par le globule rouge est très petite devant sa distance à la sonde et que l'angle θ entre le faisceau d'ultrasons et le vecteur vitesse \vec{v} est constante. On définit le décalage en fréquence par $\Delta f = f_2 - f_0$ où f_2 est la fréquence de l'onde reçue par la sonde après avoir été réfléchi par une hématie. Pour déterminer l'expression du décalage en fréquence Δf , on se place dans le cas $\theta = 0$ dans les questions qui suivent.

- Établir l'expression de la fréquence apparente f_1 de l'onde perçue par l'hématie en fonction de f_0 , v et c lorsque celle-ci se rapproche de la sonde.
- L'onde ultrasonore est réfléchi par l'hématie à la fréquence f_1 dans son référentiel en mouvement rectiligne constant à la vitesse v . Établir l'expression de la fréquence f_2 de l'onde reçue par la sonde en fonction de f_1 , v et c .
- En déduire l'expression du décalage fréquentiel par $\Delta f = f_2 - f_0$ et le simplifier en considérant que les hématies ont une vitesse v très petite devant la célérité des ultrasons.

L'inclinaison de la sonde d'un angle θ par rapport au vaisseau sanguin modifie l'expression de la fréquence f_2 :

$$\Delta f = \frac{2v}{c} \cdot \cos\theta$$

Une mesure effectuée au niveau de l'aorte conduit à un décalage fréquentiel $f_2 - f_0 = 2,0 \text{ kHz}$ pour un angle θ de 20° .

- Calculer la vitesse des globules rouges. Expliquer qualitativement pourquoi un médecin ne peut obtenir une mesure aussi précise de la vitesse des hématies en pratique.

2. Traitement du signal

Le signal reçu par la sonde est composé de plusieurs fréquences parmi lesquelles la fréquence $f_0 + f_2$ et la fréquence $|f_0 - f_2|$. Un filtre permet de ne conserver que le terme de décalage fréquentiel car il permet de déterminer la vitesse des hématies.

Le filtre, représenté sur la figure 4, est alors branché sur une charge d'impédance infinie, de manière à fonctionner en boucle ouverte $i_s = 0$.

En régime sinusoïdal forcé, tout signal sinusoïdal $f(t) = f_0 \cos(\omega t + \phi)$ est associé à une grandeur complexe $\underline{f} = f_0 \exp[j(\omega t + \phi)]$.

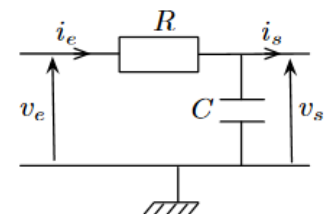


FIGURE 4 – Filtre.

- Rappeler brièvement l'intérêt de la notation complexe. Rappeler la définition de l'impédance complexe d'un dipôle.

Le filtre est constitué d'un résistor de résistance R et d'un condensateur de capacité C . On supposera que la tension à l'entrée s'écrit $v_e(t) = v_0 \cos(\omega t)$. La tension de sortie est notée $v_s(t)$.

- Donner les équivalents d'un condensateur à basse et haute fréquences. En déduire sans calcul les limites basse et haute fréquences de la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{v}_s / \underline{v}_e$. En déduire la nature du filtre et justifier son intérêt dans le cas présent.
- Déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{v}_s / \underline{v}_e$ et exprimer les constantes a et ω_0 :

$$\underline{H} = \frac{a}{1 + j(\omega/\omega_0)}$$

- Exprimer le gain du filtre. Commenter l'expression obtenue.
- Calculer la valeur de la fréquence de coupure pour une résistance $R = 3 \text{ k}\Omega$ et une capacité $C = 20 \text{ nF}$. Ce choix de dipôles est-il pertinent pour le traitement du signal reçu par la sonde.