

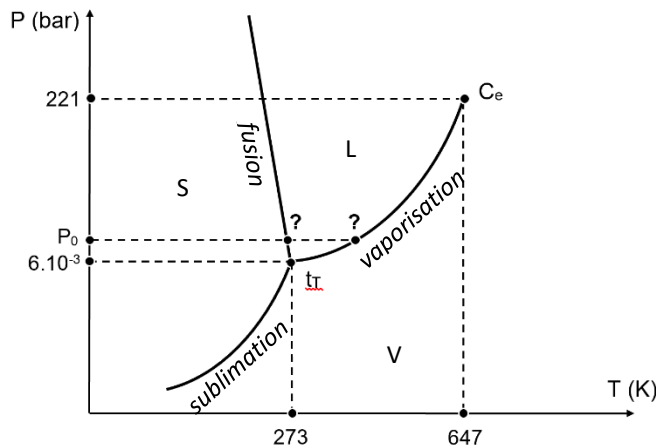
DS8 – samedi 27 mars 2021

1. Modèle simplifié d'un geyser

A. Ébullition de l'eau dans la chambre

Diagramme d'état de l'eau

1. Diagramme (P,T) : températures manquantes : $T_{fus} = 273K$ et $T_{eb} = 373K$ à $P_{atm} = 1,1013bar$.



2. Pression de vapeur saturante liquide-vapeur $P_{sat}(T)$: pression partielle de l'espèce chimique dans la phase vapeur à l'équilibre liquide-vapeur avec la phase liquide pure de cette espèce. La valeur se lit sur la courbe de vaporisation.

3. Relation de Clapeyron pour l'équilibre liquide-vapeur :

$$\ell_{\ell \rightarrow v}(T) = T \cdot (v_{vap} - v_{\ell}) \cdot \frac{dP}{dT} \approx T \cdot v_V \cdot \frac{dP}{dT} \text{ car } v_V \gg v_L$$

Ordres de grandeur des volumes massiques : $v_{\ell} \sim 1 \text{ L} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $v_{vap} = \frac{V_{vap}}{m} = \frac{nRT}{mP} = \frac{RT}{MP} \sim 1 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.

4. En supposant que la vapeur d'eau se comporte comme un gaz parfait et que, pour des températures d'ébullition comprises entre 0°C et 200°C, l'enthalpie massique d'ébullition $\ell_{\ell \rightarrow v}$ de l'eau est indépendante de la température, montrer que la pression de vapeur saturante de l'eau peut s'exprimer au moyen de la relation suivante, appelée formule de Rankine :

$$\ell_{\ell \rightarrow v}(T) = T \cdot v_V \cdot \frac{dP}{dT}$$

$$\ell_{\ell \rightarrow v}(T) = T \cdot \frac{RT}{M_{eau} \cdot P} \cdot \frac{dP}{dT}$$

Séparation des variables P et T , puis intégration en supposant $\ell_{\ell \rightarrow v}$ constant :

$$\frac{dP}{P} = \frac{M_{eau} \cdot \ell_{\ell \rightarrow v}}{R} \frac{dT}{T^2} \Rightarrow \int_{P_0}^{P_{sat}} \frac{dP}{P} = \frac{M_{eau} \cdot \ell_{\ell \rightarrow v}}{R} \int_{T_0}^T \frac{dT}{T^2}$$

$$\ln\left(\frac{P_{sat}}{P_0}\right) = \frac{M_{eau} \cdot \ell_{\ell \rightarrow v}}{RT_0} - \frac{M_{eau} \cdot \ell_{\ell \rightarrow v}}{R} \frac{1}{T}$$

$$\ln\left(\frac{P_{sat}}{P_0}\right) = A - \frac{B}{T}$$

Par identification :

$$A = \frac{M_{eau} \cdot \ell_{\acute{e}b}}{RT_0}$$

$$B = \frac{M_{eau} \cdot \ell_{\acute{e}b}}{R}$$

Application numérique : $P_{sat} = P_0 \cdot \exp\left(A - \frac{B}{T}\right) = 1 \times \exp\left(13,7 - \frac{5120}{423}\right) = 5 \text{ bar}$

La pression de vapeur saturante augmente avec la température : on retrouve bien la tendance donnée par la courbe de vaporisation du diagramme (P, T) .

Formation d'une bulle dans l'eau

5. D'après la relation de l'hydrostatique intégrée,

$$P_H = P_0 + \rho_{eau} gH$$

Application numérique (pressions en pascal dans SI) : $P_H = 1 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^3 \times 9,8 \times 100 \approx 11 \cdot 10^5 \text{ Pa} \approx 11 \text{ bar}$

6. Une bulle apparaît si la pression du liquide passe sous la valeur de P_{sat} : $P_{sat} > P_H$.
Calculons la température correspondant à une pression de vapeur saturante de 11 bar :

$$T = \frac{B}{A - \ln\left(\frac{P_H}{P_0}\right)} = 4,5 \cdot 10^2 \text{ K} \approx 180^\circ \text{C}$$

B. Ascension de l'eau dans la cheminée et éruption du geyser

Critère d'instabilité et condition d'existence du geyser

7. La loi de Laplace s'applique à un gaz parfait lors d'une transformation isentropique (en pratique, adiabatique et réversible). La détente du gaz est brutale ce qui permet de considérer que sur la durée de la vidange, les transferts thermiques n'ont pas eu le temps de s'établir.

Entre les instants $t = 0$ et t , la loi de Laplace s'écrit :

$$P_H \cdot V_b^\gamma = P_{BG}(Z) \cdot (V_b + SZ)^\gamma$$

8. L'expression précédente peut être remaniée pour faire apparaître un terme suffisamment petit pour procéder à un développement limité ($SZ \ll V_b \Rightarrow \frac{SZ}{V_b} \ll 1$) :

$$P_H \cdot V_b^\gamma = P_{BG}(Z) \cdot (V_b + SZ)^\gamma$$

$$P_H = P_{BG}(Z) \cdot \left(1 + \frac{SZ}{V_b}\right)^\gamma$$

$$P_{BG}(Z) = P_H \cdot \left(1 + \frac{SZ}{V_b}\right)^{-\gamma}$$

$$P_{BG}(Z) \approx P_H \cdot \left(1 - \gamma \cdot \frac{SZ}{V_b}\right)$$

Enfin, en remplaçant P_H par $P_0 + \rho_{eau} gH$ (question 5) :

$$P_{BG} \approx (P_0 + \rho_{eau} \cdot g \cdot H) \cdot \left(1 - \frac{\gamma \cdot S \cdot Z}{V_b}\right)$$

Cette pression correspond à la pression exercée par la vapeur d'eau au-dessous de la colonne de liquide qui est éjectée à travers la cheminée du geyser.

9. L'équation différentielle simplifiée en considérant $Z \ll H$ devient :

$$(H - Z) \cdot \frac{d^2 Z}{dt^2} + g \cdot \left(-1 + \frac{\gamma \cdot S \cdot H}{V_b} \cdot \left(1 + \frac{P_0}{\rho_{eau} \cdot g \cdot H} \right) \right) \cdot Z = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{g}{H} \cdot \left(-1 + \frac{\gamma \cdot S \cdot H}{V_b} \cdot \left(1 + \frac{P_0}{\rho_{eau} \cdot g \cdot H} \right) \right) \cdot Z = 0 \quad (2)$$

10. Le format mathématique des solutions de l'équation différentielle dépend du signe du coefficient devant Z (ou de manière plus générale, du signe du discriminant du polynôme caractéristique) :

$$\ddot{Z} + \frac{g}{H} \cdot \left(-1 + \frac{\gamma \cdot S \cdot H}{V_b} \cdot \left(1 + \frac{P_0}{\rho_{eau} \cdot g \cdot H} \right) \right) \cdot Z = 0 \Rightarrow \ddot{Z} + c \cdot Z = 0$$

$$r^2 + c = 0 \Rightarrow r^2 = -c \Rightarrow \begin{cases} c > 0 \Rightarrow r = \pm j \cdot \sqrt{c} \\ c < 0 \Rightarrow r = \pm \sqrt{-c} \end{cases}$$

(a) Dans le premier cas ($c > 0$), la solution est de type sinusoïdal : l'altitude Z de la colonne d'eau oscille sans qu'aucune éruption ne soit observée puisque $Z(t)$ est alors une fonction bornée,

(b) Dans le second cas ($c < 0$), la solution est de type exponentiel : l'altitude Z de la colonne d'eau n'oscille pas :

$$Z(t) = A \cdot e^{\sqrt{-c} \cdot t} + B \cdot e^{-\sqrt{-c} \cdot t}$$

Si le second terme tend plus ou moins rapidement vers 0, le premier terme est croissant. Il rend compte de l'ascension de la colonne d'eau.

L'ascension nécessite $c < 0$ ce qui correspond à :

$$-1 + \frac{\gamma \cdot S \cdot H}{V_b} \cdot \left(1 + \frac{P_0}{\rho_{eau} \cdot g \cdot H} \right) < 0$$

$$\frac{\gamma \cdot S \cdot H}{V_b} \cdot \left(1 + \frac{P_0}{\rho_{eau} \cdot g \cdot H} \right) < 1$$

$$V_b > V_{b,min} = \gamma \cdot S \cdot H \cdot \left(1 + \frac{P_0}{\rho_{eau} \cdot g \cdot H} \right)$$

11. La section S de la colonne pour laquelle la naissance d'un geyser est possible s'obtient par :

$$S = \frac{V_b}{\gamma \cdot H \cdot \left(1 + \frac{P_0}{\rho_{eau} \cdot g \cdot H} \right)}$$

Application numérique : $S = 0,35m^2$

Soit une colonne de rayon maximal de l'ordre de 30 cm.

12. La durée de l'éruption correspond à la durée nécessaire pour que le bas de la colonne d'eau atteigne le sommet de la cheminée, soit ici $Z = 100 m$. Le premier graphique permet de lire une durée de l'ordre de 25 s. À cette date, la vitesse d'éjection est $v_c = 60m \cdot s^{-1}$.

13. Sur la ligne de courant CG , la relation de Bernoulli s'écrit, avec z altitude du point par rapport à la surface du sol :

$$\frac{P_C}{\rho} + \frac{1}{2} \cdot v_C^2 + g \cdot z_C = \frac{P_G}{\rho} + \frac{1}{2} \cdot v_G^2 + g \cdot z_G$$

Valeurs des termes apparaissant dans l'équation :

- La pression au sommet G est égale à la pression atmosphérique. C'est aussi le cas en C si l'on utilise la relation de l'hydrostatique (question 5) avec une hauteur $H = 0 m$ dans la colonne.

- La vitesse d'éjection v_C est lue sur le graphique à la date $t = 25s$: $v_C = 60m \cdot s^{-1}$, la vitesse au sommet est null (point de rebroussement).
- L'altitude du point C est nulle, l'altitude du point G est l'inconnue recherchée.

Hauteur du geyser :

$$z_G = H_{max} = \frac{v_C^2}{2g} = 1,8 \cdot 10^2 m$$

14. Les conditions d'application de la relation de Bernoulli sont, lors d'une étude dans un référentiel galiléen :

- Un fluide incompressible et parfait (peut-être les frottements ne sont-ils pas ici négligeables, et les variations de pression telles que la masse volumique de l'eau est modifiée au cours de l'ascension),
- Un écoulement laminaire quasi-stationnaire (peut-être l'écoulement est-il localement turbulent ?),
- Une absence de pièces mobiles (qui qui semble raisonnable).

D'autre part, la colonne est vraisemblablement constituée d'un mélange d'eau liquide et de vapeur, ce qui va dans le sens d'un problème avec l'hypothèse d'incompressibilité.

C. Rechargement en eau de la chaudière par une canalisation horizontale après éruption

15. L'écoulement est permanent, le fluide est incompressible, alors, le débit volumique se conserve. Le débit volumique est alors indépendant de x . D'autre part, la section étant constante, la vitesse ne dépend pas de x . Par conséquent, elle ne dépend que de la distance r à l'axe du cylindre : $\vec{v} = v(r) \cdot \vec{e}_x$.

16. La vitesse n'est pas uniforme sur la section du cylindre. De fait, l'accès au débit nécessite de décomposer la section en surfaces élémentaires comprises entre r et $r + dr$ (surface élémentaire $dS = 2\pi r dr$).

$$Q = \int v(r) \cdot dS = \int_0^R \frac{1}{4 \cdot \eta_{eau}} \cdot \frac{P(0) - P(L)}{L} \cdot (R^2 - r^2) \cdot 2\pi r dr$$

$$Q = \frac{2\pi}{4 \cdot \eta_{eau}} \cdot \frac{P(0) - P(L)}{L} \cdot \int_0^R (R^2 - r^2) \cdot r dr$$

$$Q = \frac{\pi}{2 \cdot \eta_{eau}} \cdot \frac{P(0) - P(L)}{L} \cdot \left[\frac{1}{2} r^2 R^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^R$$

$$Q = \frac{\pi}{8 \cdot \eta_{eau}} \cdot \frac{P(0) - P(L)}{L} \cdot R^4$$

La section S_C s'exprime $S_C = \pi R^2$, ainsi, le débit volumique s'exprime finalement :

$$Q = \frac{S_C^2}{8\pi \cdot \eta_{eau}} \cdot \frac{P(0) - P(L)}{L}$$

17. La viscosité dynamique est définie comme le coefficient de proportionnalité entre la contrainte de cisaillement et le gradient de vitesse. L'expression de la force s'obtient en multipliant l'expression de la force par la surface de contact :

$$\vec{\tau} = \pm \eta \frac{dv}{dr} \vec{e}_x \implies \vec{F} = \pm \eta S \frac{dv}{dr} \vec{e}_x$$

La paroi freine le fluide. Par conséquent, par principe des actions réciproques, le fluide entraîne la paroi dans le sens de l'écoulement (ici, colinéaire et de même sens que \vec{e}_x) ce qui amène à conserver le signe - puisque le gradient de vitesse est négatif ($v(r)$ décroît avec r).

Le gradient de vitesse s'obtient à partir de l'expression donnée dans l'énoncé :

$$v(r) = \frac{1}{4 \cdot \eta_{eau}} \cdot \frac{P(0) - P(L)}{L} \cdot (R^2 - r^2) \implies \frac{dv}{dr} = \frac{-2r}{4 \cdot \eta_{eau}} \cdot \frac{P(0) - P(L)}{L} \implies \left(\frac{dv}{dr} \right)_{r=R} = \frac{-R}{2 \cdot \eta_{eau}} \cdot \frac{P(0) - P(L)}{L}$$

$$\overrightarrow{F_{r=R}} = \eta S_c \cdot \frac{R}{2 \cdot \eta_{eau}} \cdot \frac{P(0) - P(L)}{L} \overrightarrow{e_x}$$

$$\overrightarrow{F_{r=R}} = \eta \cdot \frac{\pi R^2}{\eta_{eau}} \cdot (P(0) - P(L)) \cdot \overrightarrow{e_x}$$

18. Une résistance électrique est définie par le rapport de la différence de potentiel cause du transport de charge sur le flux de charges (=intensité électrique) qui en est la conséquence :

$$R_{el} = \left| \frac{\Delta V}{I} \right|$$

Dans un conducteur traversé soumis à une différence de potentiel $V_1 - V_2 > 0$ le long de son axe. En régime stationnaire, et en l'absence de sources de charges, ce débit de charges se conserve.

$$I = cte = j(x) \cdot S(x) = j(x) \cdot S$$

La loi d'Ohm locale s'écrit :

$$\vec{j} = -\sigma \cdot \overrightarrow{grad}V$$

Projetée selon la direction du flux de charge $\overrightarrow{e_x}$, elle s'écrit :

$$j(x) = -\sigma \cdot \frac{dV}{dx}$$

Ainsi,

$$I = -\sigma S \cdot \frac{dV}{dx} \implies dV = -\frac{I}{\sigma S} \cdot dx$$

Par intégration,

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -\frac{I}{\sigma S} \int_0^L dx \implies V_2 - V_1 = -\frac{I \cdot L}{\sigma S} \implies R_{el} = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{L}{\sigma S}$$

19. Par analogie, la résistance hydraulique R_H est définie comme le rapport de la différence de pression motrice (cause) sur le débit volumique (conséquence).

$$R_H = \left| \frac{\Delta P_{mot}}{Q} \right| = \frac{8\pi \cdot \eta_{eau} L}{S_c^2}$$

Les deux résistances R_H et R_{el} croissent avec la longueur de milieu traversé, et diminuent avec la section traversée. En revanche, l'influence de la section est plus marquée pour la résistance hydraulique.

20. La résistance hydraulique est très dépendante de la section de la canalisation. L'évacuation préférentielle à travers la cheminée verticale s'explique sans doute par une section beaucoup plus importante de la cheminée par rapport à la canalisation horizontale de rechargement, et ce même s'il est plus difficile de provoquer un écoulement vers le haut, à l'encontre de la gravité.

D. Évolution de la température dans la chambre en fonction du temps

21. j_{th} représente un flux thermique surfacique (ou puissance surfacique) : il s'exprime donc en $W \cdot m^{-2}$.

22. Système étudié : l'eau du réservoir.

Le système reçoit un transfert thermique de la part de la partie basse de la chambre qui contribue à augmenter l'énergie interne de l'eau. D'autre part, l'eau liquide est supposée incompressible. Par conséquent, la transformation sera supposée isochore (pas de travail des forces pressantes).

$$dU = \delta Q = j_{th} \cdot S \cdot dt = hS_e \cdot (T_R - T) \cdot dt > 0$$

Pour une phase condensée, la variation d'énergie interne est associée à la variation de température :

$$dU = m_{eau} \cdot c_{eau} \cdot dT$$

En combinant ces deux expressions de dU , il est possible de faire apparaître une équation différentielle :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{hS_e}{m_{eau} \cdot c_{eau}} \cdot T = \frac{hS_e}{m_{eau} \cdot c_{eau}} \cdot T_R$$

23. En introduisant un temps caractéristique $\tau_E = \frac{m_{eau} \cdot c_{eau}}{hS_e}$, la résolution de cette équation différentielle du premier ordre à coefficients constants donne :

$$T(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau_E}} + T_R$$

À l'instant initial, $T(t = 0) = T_E$, ce qui permet de déterminer l'expression de la constante A .

$$T(t) = (T_E - T_R) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_E}} + T_R$$

24. L'ébullition se produit lorsque $T = T_{eb}$, soit

$$t_1 = \tau_E \cdot \ln\left(\frac{T_R - T_E}{T_R - T_{eb}}\right) = \frac{m_{eau} \cdot c_{eau}}{hS_e} \cdot \ln\left(\frac{T_R - T_E}{T_R - T_{eb}}\right)$$

Il paraît cohérent que le temps de chauffe soit d'autant plus grand que la masse d'eau à chauffer soit importante, et d'autant plus faible que la surface à travers laquelle il est chauffé soit grande. D'autre part, plus l'eau arrive froide, plus la durée nécessaire est grande.

25. La vaporisation à température T_{eb} constante et pression P_H constante nécessite un transfert thermique $m_{eau} \cdot \ell_{eb}$. Ce transfert thermique est apporté à travers la surface inférieure : $hS_e \cdot (T_R - T_{eb}) \cdot \Delta t$.

On en déduit la durée de l'ébullition :

$$\Delta t = \frac{m_{eau} \cdot \ell_{eb}(T_{eb})}{hS_e \cdot (T_R - T_{eb})}$$

2. Vélodimétrie par effet Doppler

1. Mesures de fréquence et vitesse des hématies

a) Soient t_1 à t_4 , les instants définis ci-dessous :

- t_1 : début d'émission par la source,
- t_2 : réception du début du signal par l'hématie,
- t_3 : début de la seconde période émise ($T_E = t_3 - t_1$)
- t_4 : début de réception de la seconde période émise ($T_R = t_4 - t_2$)

Entre les instants t_2 et t_1 , l'onde parcourt la distance D avec $D = c \cdot (t_2 - t_1)$.

Entre les instants t_4 et t_3 , l'onde parcourt la distance $D - d$ où d est la distance parcourue par l'hématie entre les instants t_4 et t_2 ($d = v \cdot (t_4 - t_2)$).

Ainsi,

$$c \cdot (t_4 - t_3) = D - v \cdot (t_4 - t_2)$$

$$c \cdot (t_4 - t_3) = c \cdot (t_2 - t_1) - v \cdot (t_4 - t_2)$$

$$c \cdot (T_R - T_E) = -v \cdot T_R$$

$$f_R = f_E \cdot \frac{c + v}{c}$$

Avec les notations de l'énoncé,

$$f_1 = f_0 \cdot \frac{c + v}{c}$$

b) Selon un principe analogue, cette fois-ci avec une source qui se rapproche du récepteur immobile, la fréquence f_2 s'écrit en fonction de f_1 :

$$f_2 = f_1 \cdot \frac{c}{c - v}$$

c) En rassemblant les deux expressions obtenues en a) et b) :

$$f_2 = f_0 \cdot \frac{c + v}{c - v}$$

Le décalage fréquentiel s'écrit :

$$\Delta f = f_2 - f_0 = f_0 \left(\frac{c + v}{c - v} - 1 \right)$$

$$\Delta f = f_0 \left(\frac{c + v - c + v}{c - v} \right)$$

$$\Delta f = f_0 \frac{2v}{c - v} \approx f_0 \frac{2v}{c}$$

d) Application numérique : $v = 0,40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

La connaissance précise de la valeur de l'angle θ ainsi que son maintien fixe pendant la mesure ne permettent que d'accéder à un ordre de grandeur de la vitesse des hématies.

2. Traitement du signal

a) La notation complexe permet d'éviter les complications liées à la manipulation et à la dérivation de sommes de fonctions sinusoïdales :

$$\frac{ds}{dt} = j\omega s$$

L'impédance complexe est le rapport de la tension complexe aux bornes du dipôle et de l'intensité complexe du courant qui le traverse. En **convention récepteur** :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

b) Équivalents à basse et haute fréquences :

Impédance	Limite BF	Limite HF
$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$	$\underline{Z}_C \rightarrow \infty$ Equivalent à un interrupteur ouvert	$\underline{Z}_C \rightarrow 0$ Equivalent à fil

À basse fréquence, le courant dans la branche RC est nulle. La tension aux bornes du résistor est donc nulle. Par conséquent, la tension v_s aux bornes du condensateur vaut v_e .

À haute fréquence, la tension v_s aux bornes du condensateur est équivalente à la tension aux bornes d'un fil. Elle est donc nulle.

Ce filtre est donc un filtre passe-bas. Ce choix est motivé par le fait que la composante intéressante est celle de fréquence Δf , avec $\Delta f \ll f_0 + f_2$.

c) Grâce au théorème du pont diviseur de tension :

$$\underline{v}_s = \underline{v}_e \cdot \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Par identification :

$$RC\omega = \frac{\omega}{\omega_0} \implies \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

d) Gain du filtre :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Le gain tend vers 0 pour de hautes fréquences et vers 1 pour de basses fréquences ce qui confirme le caractère passe-bas.

e) La pulsation de coupure ω_c correspond à la valeur de pulsation pour laquelle $G = \frac{G^{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On montre par le calcul que cela correspond à la situation $\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{RC}$. En termes de fréquences, la fréquence de coupure vaut :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} = 2,7 \text{ kHz.}$$

La bande passante du filtre est donc $f \in [0; 2,7 \text{ kHz}]$.

Le signal à conserver a pour fréquence $\Delta f = 2 \text{ kHz}$ est bien dans la bande passante.

Le signal à éliminer a pour fréquence $f_0 + f_2 = 8 \text{ MHz}$: il est largement en dehors de la bande passante et sera très fortement atténué.