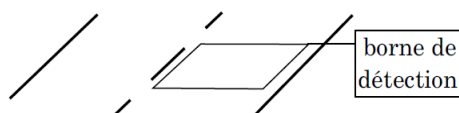


DS1 – 21 septembre 2020

1. Utilisation de bobines pour la détection de véhicules

Les détecteurs de véhicules dits à boucle inductive sont actuellement les plus répandus, tant pour le contrôle des flux sur autoroutes que pour le déclenchement automatisé de feux tricolores ou de barrières de sécurité.

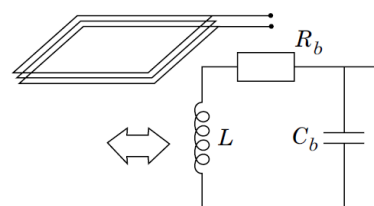
Le principe de fonctionnement d'un détecteur à boucle inductive est le suivant : un enroulement de fil électrique placé sous la chaussée est relié à une borne de détection contenant un oscillateur quasi-sinusoidal. Ce dernier génère dans la boucle un courant sinusoïdal qui crée un champ électromagnétique. La proximité d'un véhicule modifie la fréquence de l'oscillateur. Un fréquence-mètre permet de détecter la variation de fréquence d'oscillation et par conséquent, la présence d'un véhicule au-dessus de la boucle.



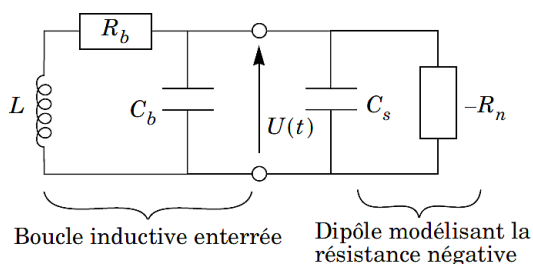
I. Étude de l'oscillateur quasi-sinusoidal

La boucle enterrée dans la chaussée est modélisée par l'association d'une bobine idéale, d'un conducteur ohmique et d'un condensateur (L , R_b et C_b représentent respectivement l'inductance, la résistance et la capacité de la boucle).

- 1) La résistance R_b modélise les sources de dissipation d'énergie liés au passage d'un courant dans la boucle enterrée. Quelle est l'origine de la dissipation d'énergie ?



L'oscillateur est constitué par la mise en parallèle de la boucle inductive enterrée, d'un condensateur de capacité C_s et d'un dipôle se comportant comme un conducteur ohmique de résistance négative ($-R_n$). Le schéma électrique équivalent à cet oscillateur est représenté ci-dessous.



- 2) Justifier que l'on puisse remplacer les deux condensateurs par un seul de capacité C dont on donnera l'expression en fonction de C_b et C_s .

- 3) Montrer que la tension $U(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme : $a \frac{d^2U}{dt^2} + b \frac{dU}{dt} + (1-c)U(t) = 0$

Donner l'expression de a , b et c en fonction de L , C , R_b et R_n .

- 4) Quelle est la condition nécessaire sur b pour que la solution de l'équation différentielle soit sinusoïdale non amortie ? En déduire la valeur à fixer pour R_n en fonction de R_b et Q , avec :

$$Q = \frac{1}{R_b} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- 5) Montrer que les solutions sont effectivement des sinusoides si $Q > Q_{lim}$, inégalité que l'on supposera vérifiée par la suite. Que vaut Q_{lim} ?
- 6) Calculer la fréquence f des oscillations en fonction de L , C et Q .
- 7) En pratique, la condition $Q > Q_{lim}$ n'est pas suffisante pour assurer une bonne stabilité et une bonne fiabilité du montage. La valeur de Q minimale recommandée est de l'ordre de 8. En déduire que, dans ses conditions, on peut écrire la relation approchée :

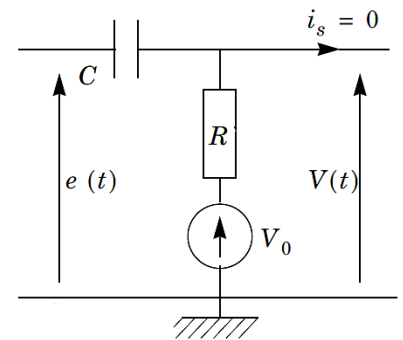
$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- 8) On désire que la fréquence d'oscillation f soit de 50 kHz avec une boucle enterrée d'inductance $L = 150 \mu\text{H}$, une capacité $C_b = 10 \text{ nF}$ et une résistance $R_b = 0,7 \Omega$. Calculer la valeur de la capacité C_s du condensateur à intégrer dans le circuit oscillant. La valeur de Q est-elle satisfaisante ?

II. Étude d'un élément d'un fréquencemètre analogique

Cette partie étudie un des modules du circuit constituant un fréquencemètre analogique permettant de détecter la variation de fréquence. Pour les graphiques demandés, il est recommandé de faire figurer les éléments qui vous semblent importants (valeurs particulières, tangentes...).

On considère le montage de la figure ci-contre où V_0 symbolise un générateur de tension constante. On suppose que le courant de sortie i_s est nul.



- 9) Déterminer l'équation différentielle reliant $e(t)$ et $V(t)$.

On s'intéresse à la réponse à une discontinuité de tension :

- $e(t) = +E$ pour $t < 0$
- $e(t) = -E$ pour $t > 0$.

On suppose que $E > V_0/2 > 0$ et on considère que pour $t < 0$, le système est en régime permanent stationnaire.

- 10) Que vaut $V(t)$ quand le circuit est en régime stationnaire pour $t < 0$?
- 11) Que vaut $V(t = 0^+)$ (on précisera également son signe) ? En déduire si $V(t)$ est continue ou non.
- 12) Déterminer, pour $t > 0$, l'expression du signal de sortie $V(t)$.
- 13) Représenter sur un même graphe les évolutions de $e(t)$ et $V(t)$.

2. Modélisation électrique de la circulation sanguine

Dans le domaine cardiovasculaire, afin de pouvoir déterminer les caractéristiques optimales de prothèses visant à remplacer des valves ou vaisseaux déficients, il est nécessaire de quantifier les pressions et les débits sanguins auxquels sont soumis les organes. La complexité des phénomènes mis en jeu dans le système circulatoire a incité les chercheurs à proposer des modèles simplifiés. Ce sujet s'intéresse à deux modèles électrocinétiques du système circulatoire, afin de mieux comprendre la réponse dynamique du système à l'éjection cardiaque :

- un modèle en écoulement permanent continu (résistance pure) ;
- un modèle en écoulement périodique (dit de Windkessel).

Données numériques relatives à une personne saine au repos physique

- Pression au sein de la veine cave : $P_{vc} = 7 \text{ mm Hg}$
- Pression au sein de l'aorte : $P_o = 100 \text{ mm Hg}$
- Débit cardiaque : $D_c = 5,0 \text{ L.min}^{-1}$
- Fréquence cardiaque : $70 \text{ battements.min}^{-1}$
- Compliance de l'aorte : $C = 6,03 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3.\text{Pa}^{-1}$
- Durée de la systole : $t_s = 0,33 \text{ s}$

On rappelle que $1 \text{ mm Hg} = 136 \text{ Pa}$

Document 1 : répartition du débit cardiaque dans le système circulatoire

La figure 1 ci-dessous indique le débit volumique alimentant chaque compartiment du circuit systémique. Ces débits sont exprimés en pourcentage du débit volumique total.

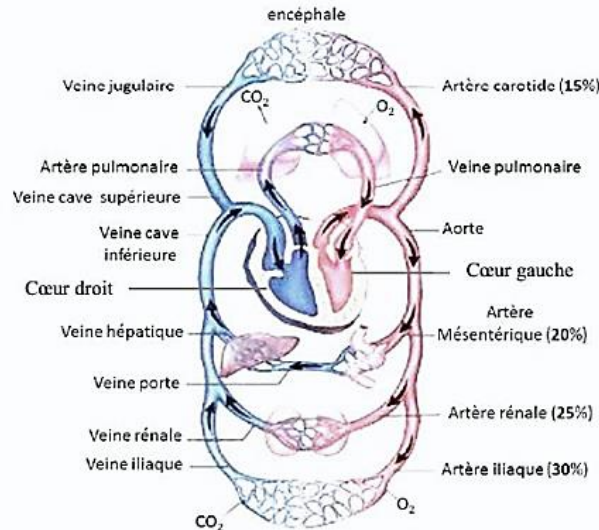


FIGURE 1 : répartition du flux sanguin dans le système circulatoire

Les poumons sont modélisés par un conducteur de résistance R_p situé entre le « cœur droit » et le « cœur gauche », associé en « série » avec ces deux parties du cœur. Ces trois « dipôles » sont en effet parcourus par le même débit sanguin (ou débit cardiaque) noté D_c . Ce débit se sépare ensuite dans les différentes branches du circuit systémique. Chaque branche est modélisée par un conducteur résistif (R_2, R_3, R_4 et R_5 représentant respectivement le cerveau, le foie, les reins et les jambes) Ces conducteurs sont associés en dérivation par rapport à la branche principale comprenant les deux cœurs et les poumons puisque le flux sanguin envoyé par le cœur se répartit à travers les différents organes. C'est également le cas de la résistance R_1 du système alimentant le muscle cardiaque (qui doit être irrigué comme tout muscle).

Document 2 : modèle à écoulement périodique, effet Windkessel

Un modèle à écoulement permanent stationnaire ne peut décrire complètement l'écoulement du sang dans le système vasculaire. En effet, le sang ne sort pas du cœur de façon continue mais il en est expulsé de façon périodique. Le régime permanent est qualifié de pulsé. En 1899, Otto Franck fournit une théorie connue sous le nom d'effet Windkessel (« chambre à air » en allemand) pour décrire le phénomène physiologique permettant de transformer le flux sanguin pulsé en un flux continu au niveau du réseau artériel. L'élasticité des artères à la sortie du cœur joue un rôle fondamental dans cette régulation du débit cardiaque.

Dans le modèle simplifié de Windkessel présenté sur la figure 2.a ci-dessous, l'élasticité des artères est prise en compte par la représentation d'une chambre d'accumulation élastique. Cette chambre, de pression intérieure $P^*(t)$ et de volume $V(t)$ variables au cours du temps, est placée sur un conduit rigide qui comporte un clapet en amont de la chambre et une résistance hydraulique R supposée constante en aval. Cette résistance mène au système veineux de pression P_v supposée constante.

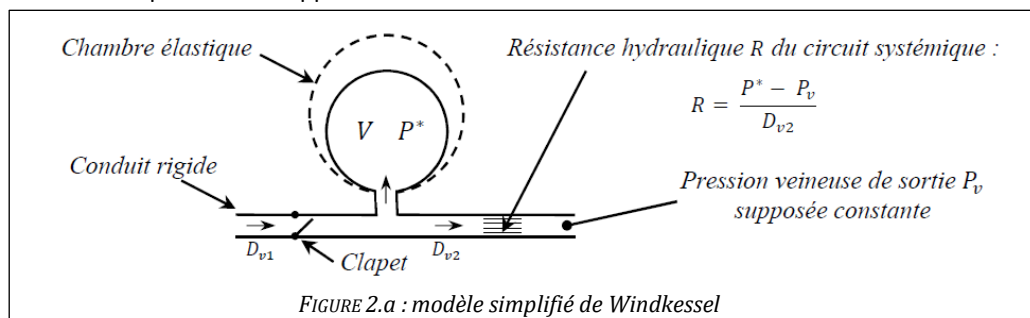


FIGURE 2.a : modèle simplifié de Windkessel

On définit ici la **pression artérielle p** mesurée par rapport à la pression veineuse :

$$p = P^* - P_v.$$

La capacité des artères à se déformer est caractérisée par une grandeur appelée **compliance C**, supposée **constante**, telle que :

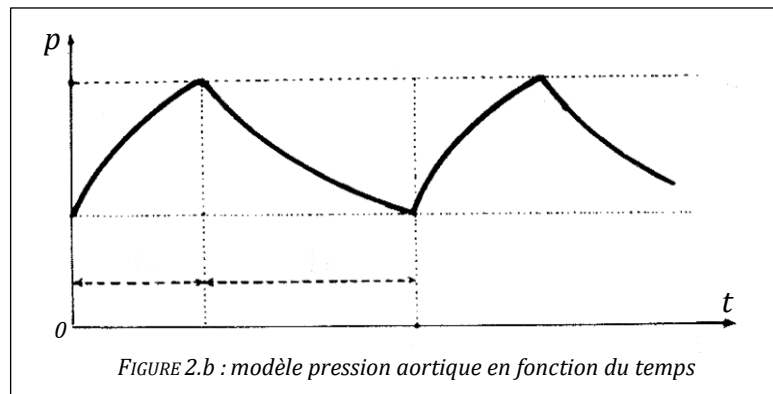
$$C = \frac{dV}{dP^*}$$

où dV représente la variation élémentaire du volume V de la chambre élastique (donc de l'artère) observée pour une variation élémentaire dP^* de la pression en son sein.

Ce modèle représente, sous une forme très schématique, le système artériel, où le clapet joue le rôle de valve cardiaque, la chambre élastique le rôle des gros vaisseaux artériel et la résistance hydraulique le rôle résistif des artérioles et des capillaires du circuit systémique alimentant les différents organes. L'écoulement y est périodique :

- Durant la **phase systolique**, de durée t_s , la valve cardiaque (clapet) est ouverte : en se contractant, le ventricule gauche du cœur expulse du sang dans l'aorte plus vite qu'il ne peut s'écouler. Le sang issu du ventricule gauche du cœur s'accumule pour une partie dans la chambre élastique, et s'échappe pour l'autre partie au travers de la résistance hydraulique. Il en résulte une augmentation de la pression artérielle mesurée jusqu'à un maximum appelé pression systolique p_s . Durant cette phase, le débit D_{v1} en amont du clapet est supposé constant et égal à A .
- Durant la **phase diastolique**, de durée t_d , le ventricule gauche du cœur se relâche. La valve aortique se referme et le sang accumulé dans la chambre s'échappe à son tour au travers la résistance hydraulique assurant ainsi une alimentation en continu des différents organes avec un débit certes variable mais jamais nul. La pression artérielle mesurée diminue et atteint un minimum appelé pression diastolique p_d juste avant une nouvelle contraction. Durant cette phase, le débit D_{v1} est supposé nul.

Le graphique, proposé à la figure 2.b, représente l'évolution de la pression aortique $p = P^* - P_v$ au cours du temps dans le cadre du modèle de Windkessel



Document 3 : enregistrements physiologiques d'un patient

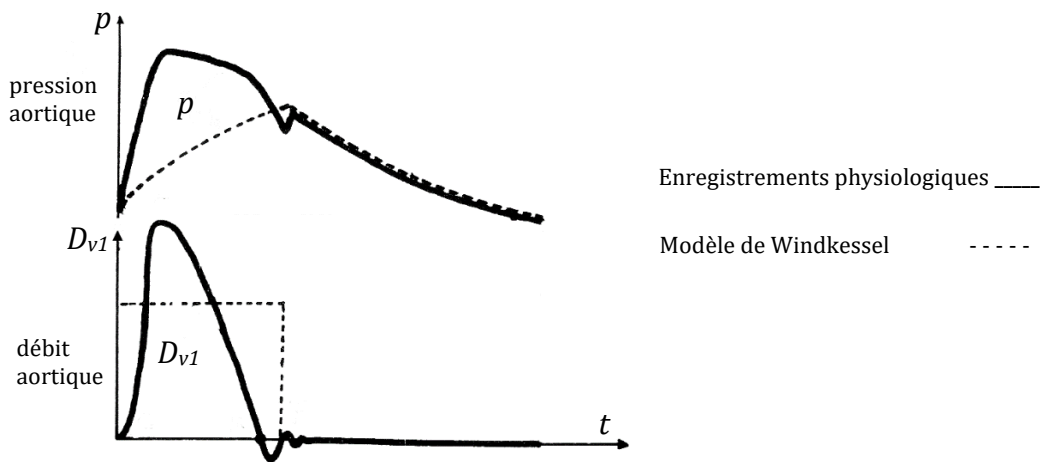
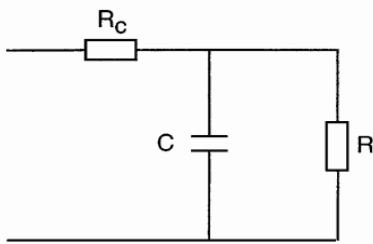


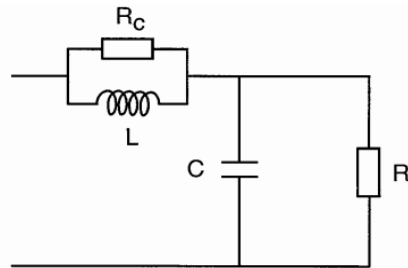
FIGURE 3 : comparaison entre les enregistrements physiologiques de pression et de débits aortiques et les résultats de la modélisation de Windkessel

Document 4 : modèle de Windkessel à 3 et 4 éléments

Le modèle de Windkessel a pu être perfectionné par un système à 3 dipôles (Windkessel à 3 éléments, schéma électrique 4.a) ou 4 dipôles (Windkessel à 4 éléments, schéma électrique 4.b). Les courbes représentées figure 4 donnent, pour chaque modèle, l'évolution de la pression mesurée et celle prévue par le modèle.



Doc. 4.a : Modèle de Windkessel à 3 éléments



Doc. 4.b : Modèle de Windkessel à 4 éléments

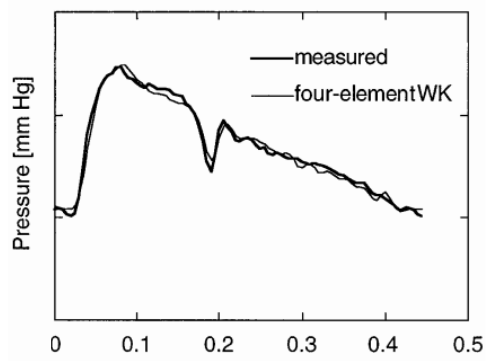
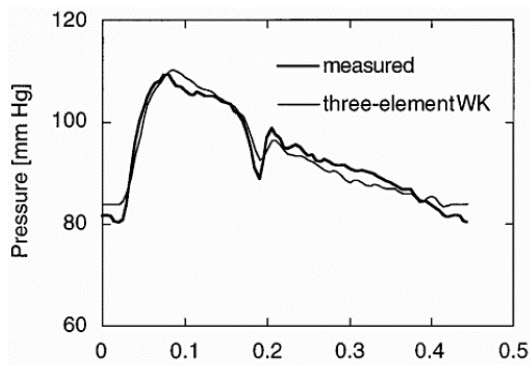


FIGURE 4 : comparaison entre les enregistrements physiologiques de la pression aortique et les résultats de la modélisation de Windkessel à 3 ou 4 éléments

QUESTIONS SUR DES NOTIONS DU PROGRAMME EN LIEN AVEC LA THÉMATIQUE

1. Condensateur

Rappeler l'expression de l'énergie emmagasinée par un condensateur soumis à une tension $u(t)$. Montrer ce résultat en utilisant la puissance reçue $p(t)$. De quelle grandeur électrique peut-on alors affirmer la continuité ?

2. Diviseur de courant

Qu'est-ce qu'un montage diviseur de courant ? Donner le circuit correspondant et démontrer le résultat énoncé en se limitant à un système de deux résistances R_1 et R_2 .

3. Étude d'un circuit électrique

Soit le montage électrique ci-contre.

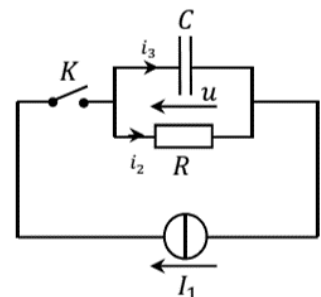
3.1. On suppose que l'interrupteur K est ouvert depuis très longtemps. Indiquer la valeur de la tension $u(t)$ dans ces conditions.

3.2. L'interrupteur K , ouvert depuis longtemps, est fermé à l'instant $t = 0$. Montrer que la tension u vérifie l'équation différentielle :

$$\tau \frac{du}{dt} + u = \alpha$$

Où α et τ sont des constantes à exprimer en fonction de R , C et I_1 .

3.3. Donner la loi d'évolution $u(t)$.



4. Résistance hydraulique

L'écoulement sanguin est modélisé par l'écoulement permanent d'un fluide incompressible dans un réseau de conduites élastiques entre un réservoir à haute pression (pression artérielle P_a) et un réservoir à basse pression (pression veineuse P_v). Pour chaque lit vasculaire (système d'irrigation d'un ou de plusieurs organes situés entre les deux réservoirs de pression) et afin de caractériser les pertes d'énergie dues aux frottements dans le réseau des artères et des veines, on définit la résistance hydraulique d'un lit vasculaire par :

$$R_H = \frac{P_a - P_v}{D_v} \quad \text{où } D_v \text{ correspond au débit volumique dans ce lit vasculaire}$$

- 4.1. Rappeler la loi d'Ohm pour un conducteur ohmique. Justifier par analogie la définition de la résistance hydraulique d'un lit vasculaire. Indiquer à quelles grandeurs électriques s'identifient la pression et le débit volumique.
- 4.2. À partir des données numériques figurant au début de l'énoncé, estimer la résistance hydraulique du circuit systémique d'un patient sain.

ANALYSE DES DOCUMENTS

5. Modèle de la circulation sanguine (*Document 1*)

- 5.1. Proposer un dipôle électrique pour modéliser le « cœur droit » et le « cœur gauche ».
- 5.2. Faire un schéma du circuit électrique modélisant la circulation sanguine globale. Indiquer les différents débits volumiques (en fonction du débit cardiaque D_c) et les deux pressions P_v et P_a .
- 5.3. En utilisant un diviseur de courant, estimer le rapport R_2/R_3 .
- 5.4. À quoi peut-on attribuer les 10 % non indiqués sur le schéma pour les fractions du débit volumique total ?

6. Modèle à écoulement périodique (*Document 2*)

- 6.1. Reproduire sur votre copie et compléter le graphe proposé à la **figure 2.b** en indiquant les phases systolique et diastolique, les durées t_s (durée de la systole), t_d (durée de la diastole), T (durée d'un battement cardiaque) et les pressions p_s et p_d .

6.2. Phase systolique

- a) Durant la phase systolique, justifier la relation suivante par une analogie électrocinétique :

$$\frac{dV}{dt} = D_{v1} - D_{v2}$$

- b) En déduire que l'équation différentielle vérifiée par la pression $P(t) = P^*(t) - P_v$ est :

$$RC \frac{dP}{dt} + P = RA$$

- c) À l'aide d'une analyse dimensionnelle, déterminer la dimension du produit RC noté τ .
- d) Déterminer complètement la solution $P(t)$ de l'équation différentielle obtenue à la question 6.2.b) en fonction de R , A , P_d et τ .
- e) Exprimer la pression P_s en fonction de P_d , R , A , t_s et τ .

6.3. Phase diastolique

Dans le cas de la phase diastolique, donner l'équation différentielle vérifiée par $P(t)$. En prenant cette fois-ci comme origine des dates le moment de la fermeture du clapet, déterminer la solution de cette équation différentielle en fonction de P_s et τ .

6.4. Applications numériques

- a) Estimer la durée de la diastole.
- b) Estimer la valeur du débit durant la phase systolique A . Exprimer sa valeur en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.
- c) Calculer, dans le cadre de ce modèle, les pressions systolique et diastolique en cm Hg et comparer ces résultats à ce que mesure un médecin pour un patient sain et au repos : 12 – 8

7. Analogie électrique

- 7.1. Justifier pourquoi le circuit étudié à la question 3. est une bonne équivalence électrique du modèle de Windkessel. La phase systolique est-elle analogue au cas interrupteur ouvert ou fermé ? Dans le cadre de cette analogie, donner la grandeur électrique analogue à la compliance du système artériel.
- 7.2. Toujours par analogie, déterminer l'expression de l'énergie emmagasinée dans la chambre d'accumulation élastique pour une pression donnée. Quelle est la nature de cette énergie ?

APPROCHE CRITIQUE ET PROSPECTIVES

8. Le **document 3** fournit l'allure des enregistrements physiologiques de pression et de débit aortiques réalisés sur un patient. Indiquer la différence entre l'enregistrement de pression du patient et le modèle de Windkessel. Expliquer les écarts constatés.

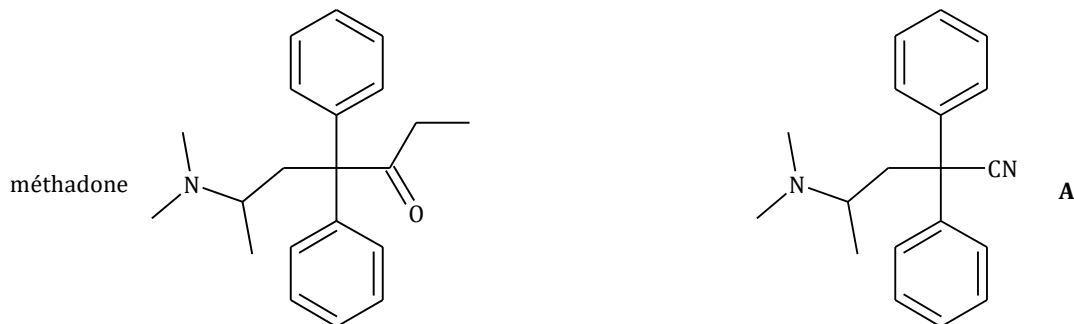
9. Modèle de Windkessel à 3 et 4 éléments

- 9.1. Que penser des résultats obtenus avec ces deux modélisations ?
- 9.2. Quel sens physique peut-on donner au conducteur ohmique de résistance R_c ?
- 9.3. L'analogie hydraulique de l'inductance L est appelée inertance. Que permet l'introduction d'une bobine dans le modèle ?

3. Synthèse de la méthadone

De nombreuses questions sont indépendantes

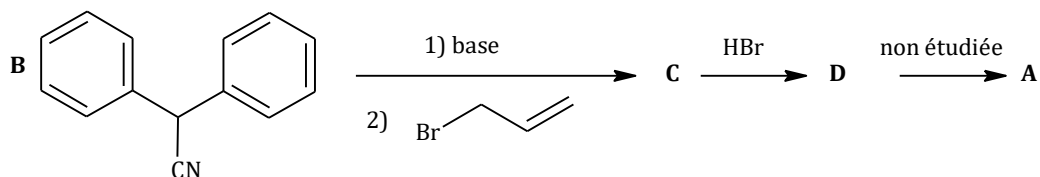
La méthadone est un analgésique aux propriétés voisines de celles de la morphine.



1. La R(-) méthadone est la plus active. La représenter. Que signifie le signe (-) ?

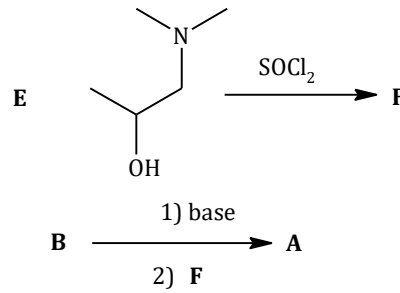
Plusieurs synthèses de la méthadone ont été élaborées. Elles utilisent l'espèce **A** dont on étudie deux voies de synthèse.

Première voie de synthèse :



2. Justifier que l'atome de carbone central de **B** est porteur d'un hydrogène labile. Représenter la base conjuguée de **B**.
3. L'obtention de **C** fait suite à la substitution nucléophile de la base conjuguée de **B** sur le 3-bromoprop-1-ène. Représenter **C** et proposer, en justifiant, un mécanisme pour son obtention.
4. Représenter l'espèce majoritaire **D** issu du traitement de **C** par le bromure d'hydrogène, ainsi que le mécanisme de sa formation. Justifier soigneusement la régiosélectivité de cette réaction.
5. Pourquoi éviter de réaliser cette réaction en présence d'eau ?

Seconde voie de synthèse



Le chlorure de thionyle $SOCl_2$ permet de remplacer le groupement $-OH$ par $-Cl$.

6. Proposer un schéma de Lewis pour le chlorure de thionyle. En déduire la géométrie de cette espèce.
7. Représenter F et proposer une équation de réaction. On pourra résumer l'espèce E sous la forme R-OH. Préciser les avantages généralement attribués à cette méthode de transformation des alcools.
8. Justifier que F n'est pas obtenu sous la forme d'un halogénoalcane mais d'un sel ionique F' de formule $(C_5H_{13}ClN^+, Cl^-)$. Représenter le cation de ce sel. Comment transformer F' pour obtenir F ?

Le document ci-dessous reproduit un extrait d'un brevet déposé pour la synthèse de A. Cet extrait décrit le protocole expérimental permettant la formation du sel ionique F' à partir de E.

A solution containing 3,77 g ($3,65 \cdot 10^{-2}$ mol) of 1-dimethylamino-2-propanol E and 10 mL of chloroform was cooled with stirring to about 0°C. A solution of 5,72 g ($4,81 \cdot 10^{-2}$ mol) freshly distilled thionyl chloride ($SOCl_2$) in 2 mL chloroform was added thereto.

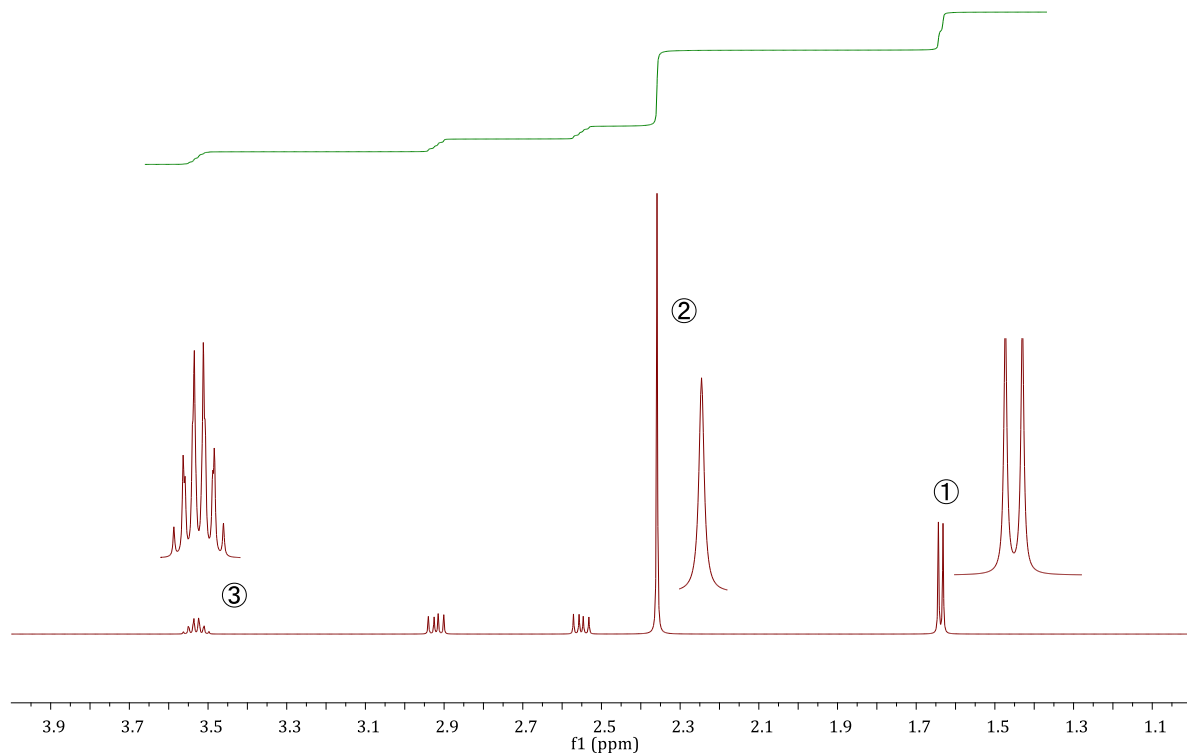
The reaction mixture was allowed to come to ambient temperature over 30 minutes, and was then boiled under reflux for another 30 minutes. The precipitated material redissolved on heating. 1-dimethylamino-2-chloropropane hydrochloride (**18'**) began to precipitate from the boiling solution.

The reaction mixture was cooled, diluted with ether and filtered. Recrystallization gave pure 1-dimethylamino-2-chloropropane hydrochloride, melting point was measured 192-193 °C.

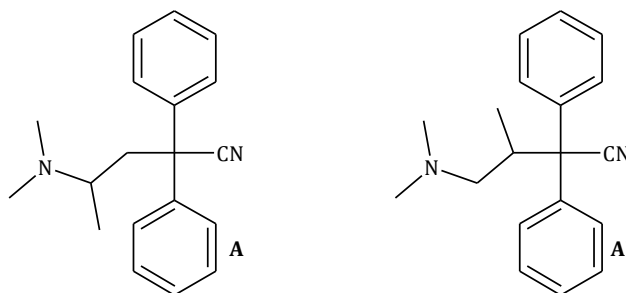
The solid weighed 5,5 g ($3,48 \cdot 10^{-2}$ mol)

C. Barnett, Modification of Methadone Synthesis Process Step, [US Pat. 4,048,211](#)

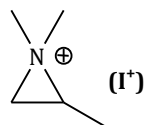
9. Quelle est la méthode utilisée pour purifier le produit ? En expliquer le principe en quelques lignes.
10. Comment le produit est-il identifié ? Quel appareil faut-il utiliser ? Quelle est la prévision de la mesure ?
11. Calculer le rendement de la synthèse.
12. Le spectre RMN 1H de l'halogénoalcane F est représenté en annexe. Reproduire la formule de F sur votre copie et attribuer à ses protons, les signaux indexés ①, ② et ③ en justifiant les multiplicités (attention, correcteur daltonyen).



Les auteurs de cette synthèse ont mis en évidence, lors de la 2^{ème} étape, la formation conjointe de **A** (le produit souhaité) et de **A'** (ci-dessous). Dans le meilleur des cas, la proportion est de 3 : 2 en faveur de **A**.



Pour justifier cette observation, ils ont supposé et mis en évidence la conversion spontanée de **F** en l'espèce (**I***) représentée ci-dessous :



13. Expliquer la formation de **I*** à partir de **F**.
14. Expliquer la formation de **A** et **A'** par action de la base conjuguée de **B** sur l'intermédiaire **I***.

Excipients

La méthadone est utilisée sous différentes formes thérapeutiques en présence d'excipient. L'un d'eux est appelé « propylène glycol vanilline acétal » et sa représentation topologique est reproduite ci-contre.

15. En déduire les représentations topologiques du propylène glycol et de la vanilline.
16. Donner le mécanisme de l'hydrolyse de l'acétal (on pourra utiliser une représentation simplifiée de l'acétal).

