

1. Synthèse de la serricornine

Ce problème a pour sujet l'étude de la serricornine, phéromone sexuelle de la femelle du scarabée du tabac (*Lasioderma serricornis*). Du fait de sa faible disponibilité à l'état naturel (il faut 65 000 femelles du scarabée du tabac pour obtenir 1,5 mg de serricornine), de nombreux groupes de recherche à travers le monde ont mis au point des synthèses asymétriques de cette molécule afin d'étudier sa bioactivité avec, entre autres, l'objectif de concevoir des pièges à phéromones pouvant représenter une alternative acceptable aux pesticides dans les plantations de tabac.

Pour l'écriture des mécanismes réactionnels, chaque fois qu'il le juge nécessaire, le candidat pourra utiliser des notations simplifiées des molécules lui permettant de se concentrer uniquement sur les groupes caractéristiques utiles.

A - Autour de la serricornine

En présence de traces d'acide, la serricornine présente une forme cyclique et une forme linéaire en équilibre. L'acétylation de la serricornine permet de faciliter son analyse en évitant la cyclisation (schéma 1) :

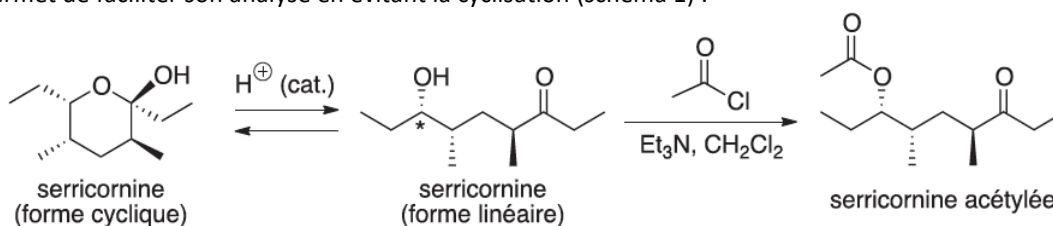


Schéma 1

1. Donner le nom de la forme linéaire de la serricornine en nomenclature systématique.
2. Attribuer le descripteur stéréochimique du carbone asymétrique de la forme linéaire de la serricornine marqué par un astérisque. Justifier la réponse.
3. Proposer un schéma mécanistique rendant compte de la formation de la forme cyclique de la serricornine à partir de la forme linéaire en présence de traces d'acide. On ne s'intéressera pas à la stéréosélectivité de la réaction.
4. Proposer un schéma mécanistique rendant compte de la formation de la serricornine acétylée à partir de la serricornine linéaire en précisant le rôle joué par la triéthylamine.

Le spectre de spectroscopie de résonance magnétique nucléaire du proton (RMN ^1H) à 400 MHz dans le chloroforme deutéré (CDCl_3) de la serricornine acétylée présente, entre autres, un signal [$\delta = 4,64$ ppm (dt, $^3J = 7,9$ Hz et $4,9$ Hz, 1 H) ; ppm = partie par million, dt = doublet de triplet]. Des données sont fournies à la fin du problème.

5. Attribuer le signal observé sur le spectre de RMN ^1H à un ou des atomes d'hydrogène caractéristiques de la serricornine acétylée. Justifier la multiplicité.
6. Le spectre de spectroscopie infrarouge (IR) de la serricornine acétylée présente, entre autres, deux bandes d'absorption intenses à 1735 et 1715 cm^{-1} . Proposer une attribution pour ces bandes d'absorption.

B - Synthèse de R. A. Pilli et M. M. Murta (1988)

La synthèse asymétrique de la serricornine racémique décrite par R. A. Pilli et M. M. Murta, au Brésil, (Synthetic Communications 1988, 18 (9), 981-993) utilise comme substrat de départ l'espèce chimique **1** (2-méthyl-2-triméthylsilyloxy-pentan-3-one) (schéma 2) :

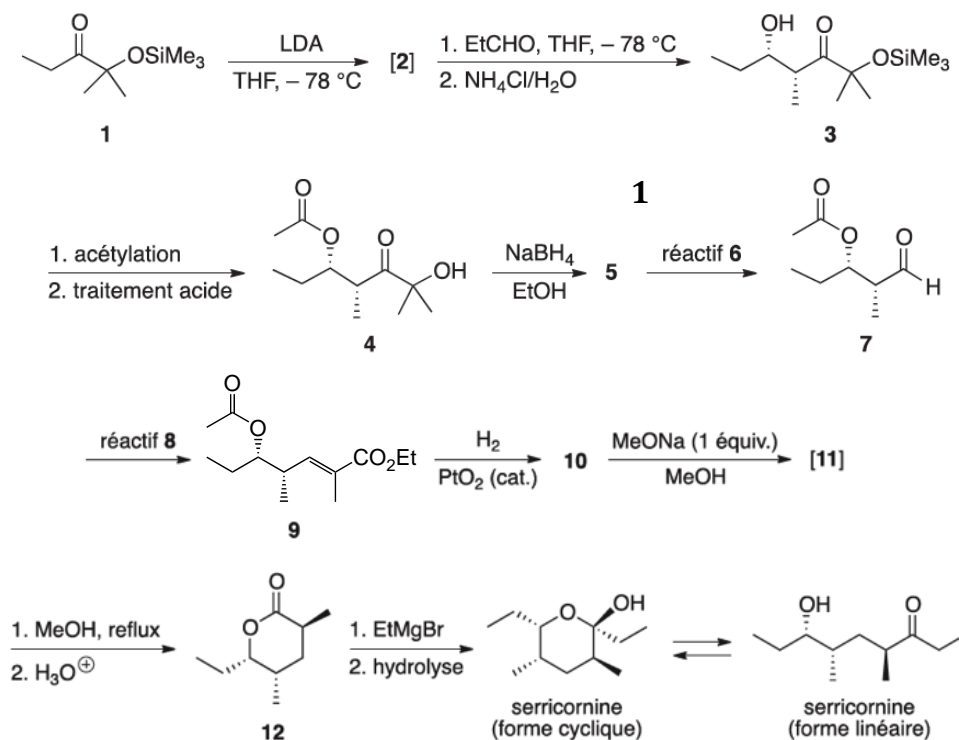


Schéma 2

- Représenter l'intermédiaire **[2]** obtenu par réaction du composé **1** avec le diisopropylamide de lithium (LDA = $[(CH_3)_2CH]_2NLi$) dans le tétrahydrofurane (THF). Et proposer un schéma mécanistique rendant compte de la formation de la β -hydroxycétone **3** à partir de l'intermédiaire **[2]**. On ne s'intéressera pas à la stéréosélectivité de la réaction.
- Représenter tous les stéréoisomères de configuration de l'espèce chimique **5** obtenus. Préciser la (les) relation(s) d'isomérisie qui les lie(nt).
- Proposer un réactif **6** pour obtenir l'aldéhyde **7** à partir de l'espèce chimique **5**. Donner la structure du sous-produit, de formule brute C_3H_6O , qui accompagne la formation de l'aldéhyde **7**.
- À l'aide du **document 1**, proposer un réactif **8** pour préparer l'ester α,β -insaturé **9** avec une excellente sélectivité et permettant une purification facile. Proposer une séquence de deux réactions permettant la synthèse de l'espèce **8**. Les mécanismes réactionnels de ces deux réactions seront explicités.
- Représenter le composé **10**. On ne s'intéressera pas à la stéréosélectivité de la réaction.
- Proposer une méthode pour préparer une solution de méthanolate de sodium (MeONa) dans le méthanol (MeOH).
- Représenter l'intermédiaire **[11]** obtenu par réaction du composé **10** avec un équivalent de méthanolate de sodium (MeONa) dans le méthanol (MeOH) et dont la formation s'accompagne de la libération d'acétate de méthyle ($MeCO_2Me$).
- Au reflux du méthanol (MeOH), l'intermédiaire **[11]** évolue spontanément pour conduire à la lactone **12** après hydrolyse acide. En reprenant les représentations de la figure 1 ci-dessous, dessiner les deux conformations « chaise » de la lactone **12**. Indiquer la conformation « chaise » la plus stable. Justifier la réponse.

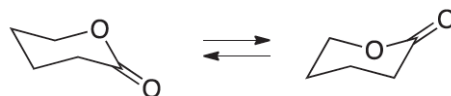
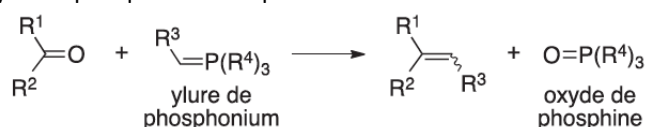


Figure 1

- Proposer une méthode de préparation du bromure d'éthylmagnésium ($EtMgBr$) en précisant, sans les justifier, trois précautions opératoires à respecter.

Document 1 - La réaction de Horner–Wadsworth–Emmons

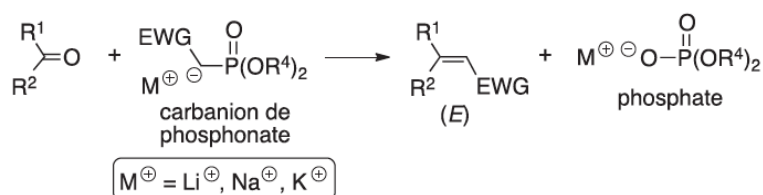
La réaction de Wittig est l'une des réactions les plus connues pour la formation de doubles liaisons carbone-carbone. La réaction de Wittig implique généralement la réaction d'un ylure de phosphonium avec un aldéhyde ou une cétone pour donner l'alcène et l'oxyde de phosphine correspondants :



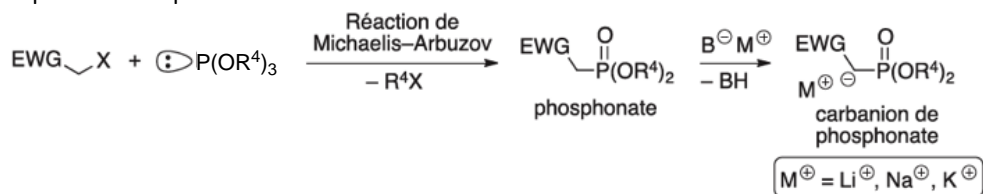
Bien que très employée en synthèse au laboratoire, la réaction de Wittig présente quelques inconvénients :

- emploi d'une base forte pour générer l'ylure de phosphonium ;
- difficulté à séparer l'oxyde de phosphine du milieu réactionnel ;
- contrôle de la configuration de la double liaison très sensible aux conditions opératoires et à la nature du groupement R³ sur l'ylure de phosphonium.

La réaction de Horner–Wadsworth–Emmons est une modification de la réaction de Wittig qui implique la réaction d'un carbanion de phosphonate stabilisé par un groupement mésomère attracteur (EWG = CO₂R, CN, SO₂R, etc.) avec des composés carbonylés :



Les carbanions de phosphonate utilisés sont générés par déprotonation des phosphonates eux-mêmes obtenus à partir des phosphites correspondants à l'aide de la réaction de Michaelis–Arbuzov :



La réaction de Michaelis–Arbuzov peut être conduite sans solvant. En utilisant le triéthylphosphite P(OEt)₃ et un dérivé bromé (X = Br), le sous-produit généré est volatil. Dans ces conditions, le phosphonate peut alors être utilisé dans la réaction de Horner–Wadsworth–Emmons sans purification.

La réaction de Horner–Wadsworth–Emmons présente plusieurs avantages sur la réaction de Wittig :

- les carbanions de phosphonates peuvent être générés avec des bases variées (par exemple Et₃N, MeONa, EtONa, tBuOK, NaH, [(CH₃)₃Si]₂NK) et sont nettement plus nucléophiles que les ylures de phosphonium ;
- les phosphates libérés sont solubles dans l'eau et donc facilement séparables de l'oléfine préparée ;
- la réaction est hautement sélective pour donner l'oléfine de configuration (E).

C - Synthèse de M. Mori, T. Chuman, K. Katö et K. Mori (1982)

La synthèse énantiosélective de la serricornine décrite par M. Mori, T. Chuman, K. Katö et K. Mori (Tetrahedron Letters 1982, 23 (44), 4593-4596), au Japon, utilise la cellulose comme matière première (schéma 3) :

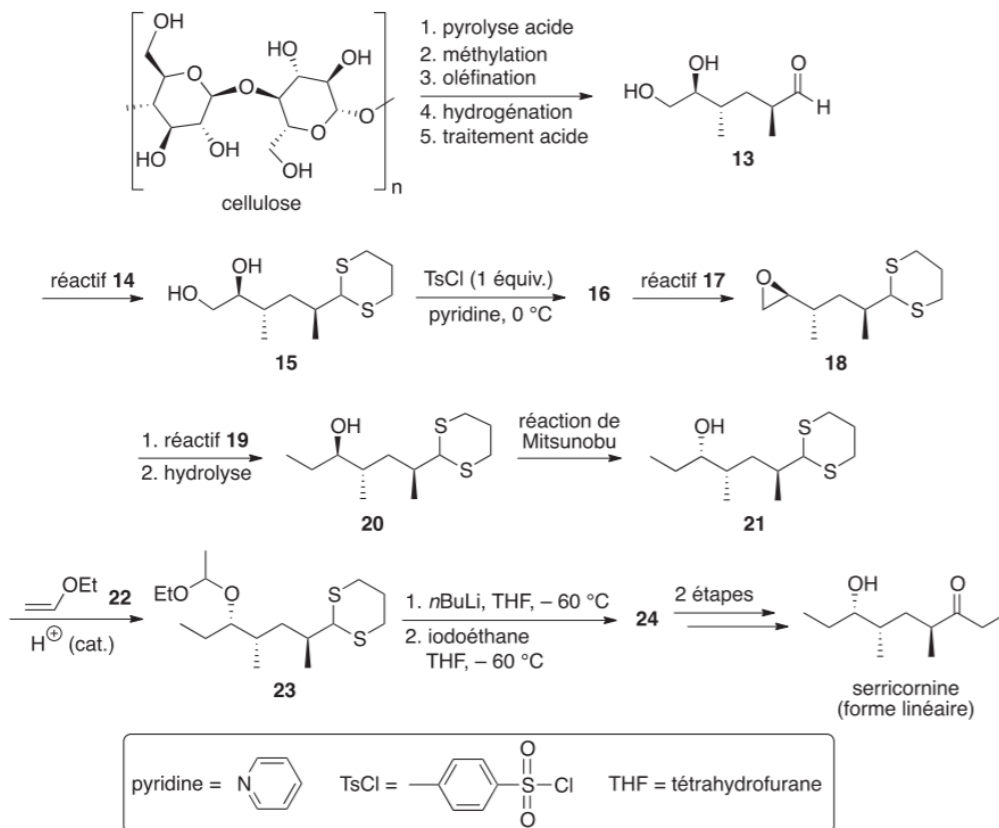
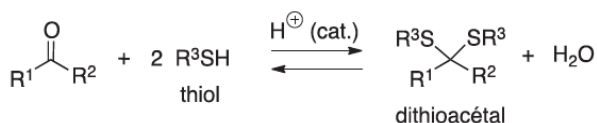


Schéma 3

16. À l'aide du **document 2** ci-après, proposer un réactif **14** et des conditions opératoires pour obtenir le 1,3-dithiane **15**.
17. Représenter le produit **16** obtenu par réaction du composé **15** avec le chlorure de tosylo (TsCl) en présence de pyridine. Justifier l'emploi d'un seul équivalent de chlorure de tosylo et justifier l'existence d'une sélectivité pour cette la réaction. Expliquer l'intérêt de cette transformation.

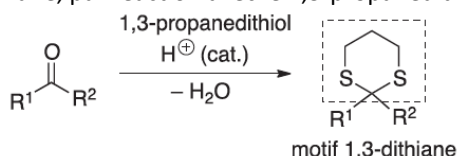
Document 2 - Les dithioacétals

Les dithioacétals sont des analogues sulfurés des acétals. Ce sont des groupes protecteurs des aldéhydes et des cétones. Inertes dans de nombreuses conditions, les dithioacétals sont obtenus par réaction d'un aldéhyde ou d'une cétone avec un thiol, en présence d'une quantité catalytique d'acide, en éliminant l'eau du milieu afin de déplacer l'équilibre de la réaction. Le mécanisme de formation des dithioacétals est analogue à celui de la formation des acétals :

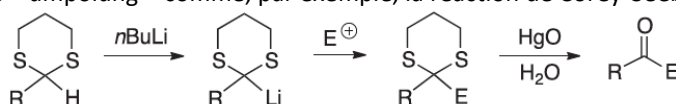


Le groupe protecteur peut être éliminé avec des réactifs mercuriques en raison de la haute affinité des ions mercure(II) pour les dérivés sulfurés.

En synthèse au laboratoire, les aldéhydes et les cétones sont très couramment protégés sous forme de dithioacétals cycliques présentant le motif 1,3-dithiane, par réaction avec le 1,3-propanedithiol :



Lorsqu'ils sont issus d'aldéhydes, les dithioacétals cycliques présentant le motif 1,3-dithiane peuvent être utilisés dans des réactions de type « umpolung » comme, par exemple, la réaction de Corey-Seebach :



18. Proposer un réactif **17** pour la formation de l'époxyde **18**. Proposer un schéma mécanistique rendant compte de la formation de l'époxyde **18**.
19. Proposer un organométallique **19** pour la formation de l'alcool **20**. Expliquer la régiosélectivité de l'ouverture de l'époxyde **18**.
20. Représenter les deux carbocations qui peuvent être obtenus lorsque l'éthylvinyléther **22** est mis en présence d'un acide. Indiquer le carbocation le moins instable. Sachant que la réaction est sous contrôle cinétique et que l'étape cinétiquement déterminante est la formation du carbocation et présente un état de transition tardif, indiquer si, a priori, la formation majoritaire du composé **23** pouvait être prévue. Justifier la réponse. Expliquer l'utilité de la formation du composé **23** dans cette synthèse.
21. En vous aidant du **document 2**, représenter le composé **24**.
22. Indiquer les deux étapes nécessaires afin d'accéder à la serricornine à partir du composé **24**. Les réactifs et conditions ne sont pas demandés.

Données :

RMN ¹H : gamme de déplacements chimiques de quelques hydrogènes caractéristiques et valeurs typiques des constantes de couplage ³J (*)

Protons	δ (ppm)
-CH-CH=CH-	1,5 – 2,4
	2,2 – 2,6
	2,3 – 2,8
-CH-N-	3,5 – 4,2
-CH-O-	3,5 – 4,8
R-CH=CH-R'	4,6 – 7,0
	9,1 – 10,3

Structures	³ J (Hz)
	4 – 8
	10 – 18

IR (gamme de fréquences de vibration de quelques liaisons caractéristiques) (*)

Liaisons	ν (cm ⁻¹)	Intensité
O-H alcool	3 200 – 3 650	Intense et large
C=O ester saturé	1 730 – 1 750	Intense
C=O ester conjugué	1 715 – 1 730	Intense
C=O aldéhyde saturé	1 720 – 1 740	Intense
C=O cétone saturée	1 705 – 1 725	Intense
C=O aldéhyde conjugué	1 680 – 1 705	Intense
C=O cétone conjuguée	1 665 – 1 885	Intense
C=C alcène	1 645 – 1 675	Moyenne
C=C alcène conjugué	1 635 – 1 650	Moyenne

*Source : *Tables of Spectral Data for Structure Determination of Organic Compounds 2nd Edition*, E. Pretsch, W. Simon, J. Seibl, T. Clerc ; W. Fresenius, J. F. K Hubert, E. Pungor, G. A. Rechnitz, W. Simon Eds. ; 1989.

2. Propagation du son émis par un rorqual

Le rorqual commun (*Balaenoptera physalus*) est un cétacé à fanons d'une longueur moyenne de 20 m et d'une masse moyenne d'environ 50 tonnes (Figure 1). C'est le plus grand animal au monde après le rorqual bleu. Présent dans toutes les mers du globe, il est capable de plonger à des profondeurs importantes, de l'ordre de plusieurs centaines de mètres. Les rorquals communs communiquent par des sons puissants de basse fréquence. Il s'agit d'impulsions d'environ 1 s espacées d'une durée de l'ordre d'une dizaine de secondes. L'analyse spectrale montre que ces émissions sonores sont centrées sur une fréquence de 20 Hz avec une largeur de bande de 3 à 4 Hz, ce qui les situe au niveau de la fréquence minimale audible par l'être humain (20 Hz) voire en dessous (infrasons). Ces émissions pourraient être des chants nuptiaux facilitant la rencontre des individus de sexes opposés et favorisant la reproduction. Ce problème a pour objectif d'évaluer l'ordre de grandeur de la portée de cette communication et si cette portée, donc la reproduction de l'espèce, pourrait être affectée par les activités humaines.



Données relatives aux ondes acoustiques

Les éléments suivants d'acoustique pourront être utiles :

Intensité acoustique : pour une onde acoustique de surpression acoustique p , se propageant dans un fluide de masse volumique ρ à une célérité c , l'expression de l'intensité acoustique I est $I = \frac{\langle p^2 \rangle}{Z}$ où $\langle p^2 \rangle$ est la valeur moyenne de p^2 et $Z = \rho c$ est l'impédance acoustique du milieu.

Surpression acoustique efficace : $p_e = \sqrt{\langle p^2 \rangle}$

Coefficient de réflexion : Lorsqu'une onde sonore arrive en incidence normale sur un dioptré acoustique séparant deux fluides d'impédances acoustiques différentes Z_1 et Z_2 , le coefficient de réflexion en puissance s'écrit :

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 = \left(\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \right)^2$$

A - Propagation du son dans l'océan

23. Relier l'indice optique d'un milieu et la vitesse de propagation de la lumière dans ce milieu. Rappeler les lois de Descartes de la réfraction et tracer la marche d'un rayon d'incidence se réfractant d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent. Rappeler les conditions pour observer une réflexion totale sur un dioptré.
24. Par analogie avec l'optique, définir un indice de réfraction à partir de la vitesse du son dans le milieu c_i et d'une vitesse de référence c_0 .

Soient deux couches d'eau de mer au sein d'un océan, séparées par un dioptré acoustique horizontal. La vitesse du son est différente dans ces deux couches. On notera c_1 la vitesse du son dans la couche supérieure et c_2 la vitesse du son dans la couche inférieure. On traitera ce dioptré comme un dioptré en optique.

Une onde sonore arrive sur le dioptré acoustique avec un angle d'incidence i_2 par rapport à la normale au dioptré. Dans un océan, à l'exception des océans polaires, la vitesse du son dans l'eau passe par une valeur minimale pour une profondeur z comprise généralement entre 500 m et 1000 m (Figure 2).

On modélise cette situation par un premier modèle simple à trois couches : une couche supérieure d'indice 1 entre la surface et une profondeur z_1 , une couche intermédiaire 2 entre les profondeurs z_1 et z_2 , et une couche inférieure 3 pour $z > z_2$ (Figure 3). La vitesse du son est notée respectivement c_1 , c_2 et c_3 dans les couches 1, 2 et 3.

On suppose $c_3 = c_1$ et $c_2 < c_1$. Les deux interfaces entre les couches seront traitées par analogie avec les dioptrés optiques.

25. Une source en un point O de la couche intermédiaire émet une onde sonore dans une direction faisant un angle θ (compris entre 0 et $\pi/2$) avec l'horizontale (voir Figure 3). Expliquer pourquoi l'onde sonore émise en O reste confinée dans la couche intermédiaire pour certaines valeurs de l'angle θ . Déterminer l'intervalle des valeurs de θ pour que ce soit le cas. Calculer numériquement les valeurs limites de cet intervalle. Tracer la marche d'un rayon illustrant ce confinement.
Données : $c_3 = c_1 = 1,51 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $c_2 = 1,48 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

On considère ensuite un modèle un peu plus élaboré comportant 5 couches associées aux indices 1 à 5 tels que : $c_1 = c_5$, $c_2 = c_4$ et $c_1 > c_2 > c_3$. La couche 4 est nettement plus épaisse que la couche 2. La source O est dans la couche 3 (figure 4).

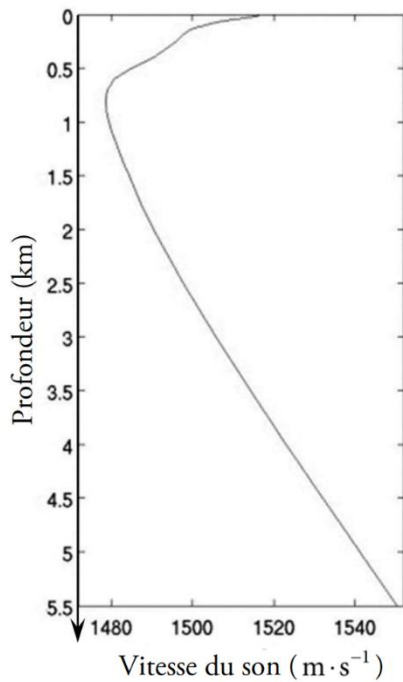


Figure 2. Variation de la vitesse du son avec la profondeur dans un océan.

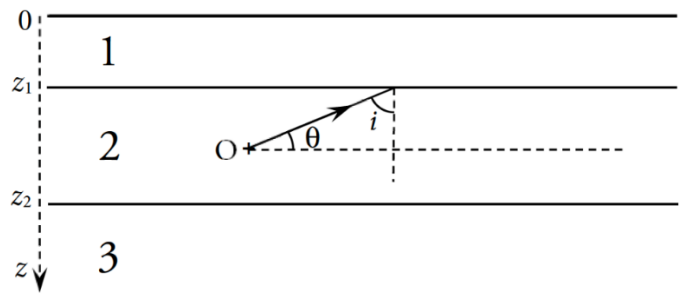


Figure 3. Modèle à trois couches.

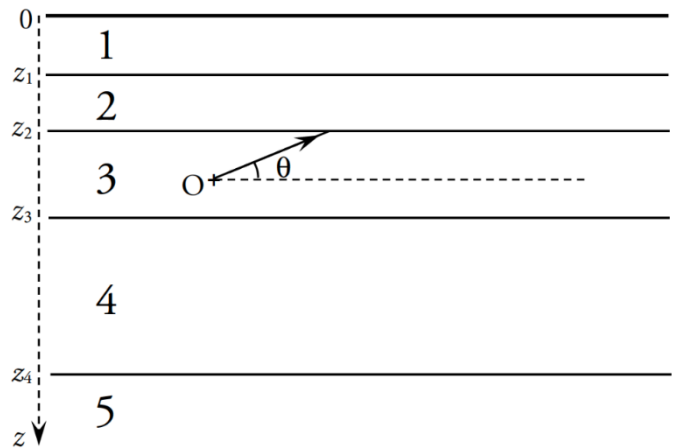


Figure 4. Modèle à cinq couches.

26. Établir l'intervalle d'angle θ pour que les rayons émis en O restent confinés dans la couche 3 et celui pour lequel les rayons émis en O restent confinés dans les couches 2, 3 et 4.

Données: $c_1 = c_5 = 1,51 \cdot 10^3 m \cdot s^{-1}$; $c_2 = c_4 = 1,49 \cdot 10^3 m \cdot s^{-1}$; $c_3 = 1,48 \cdot 10^3 m \cdot s^{-1}$

27. En réalité, les variations de vitesse de propagation du son sont continues (figure 2). Tracer qualitativement l'allure de la marche d'un rayon confiné n'atteignant ni le fond, ni la surface de l'océan. Quelle est la profondeur optimale pour une émission confinée ?

Ce domaine où les ondes sonores restent confinées en profondeur s'appelle le chenal sonore profond. Dans les océans polaires, la situation est différente parce que la température de l'eau est la plus froide en surface. En conséquence, la vitesse du son est minimale près de la surface et croît de façon monotone avec la profondeur.

Données : masse volumique de l'air $\rho_a = 1,2 kg \cdot m^{-3}$; célérité du son dans l'air $c_a = 3,4 \cdot 10^2 m \cdot s^{-1}$
 masse volumique de l'eau de mer : $\rho = 1,0 kg \cdot m^{-3}$; célérité du son $c = 1,5 \cdot 10^3 m \cdot s^{-1}$.

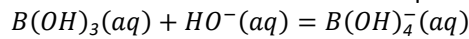
28. Justifier que la surface de l'océan se comporte pour les ondes acoustiques, par analogie avec l'optique géométrique, de la même façon qu'un miroir plan. Rappeler les lois de Descartes de la réflexion et tracer la marche d'un rayon d'incidence quelconque i se réfléchissant sur le miroir.
29. En supposant que la surface de l'eau est libre de glace, montrer, qu'une onde sonore, émise dans un océan polaire près de la surface, peut rester confinée dans un chenal sonore arctique si l'angle θ défini précédemment n'est pas trop grand. Préciser les différences avec la situation précédente et tracer l'allure de la marche d'un rayon confiné.

On admettra que la présence de glace à la surface d'un océan polaire ne modifie pas radicalement les conclusions précédentes.

B - Amortissement du son de basse fréquence dans les océans

On étudie maintenant l'amortissement de l'onde sonore dû aux phénomènes dissipatifs. Pour les fréquences supérieures à 100 kHz, cet amortissement est principalement dû à l'effet de la viscosité de l'eau. Pour les fréquences inférieures à 100 kHz, l'amortissement est dominé par des effets de relaxation chimique liés à la dissociation du sulfate de magnésium aux fréquences intermédiaires et à l'acide borique aux fréquences inférieures à 1 kHz, avec des couplages complexes entre diverses réactions chimiques. Pour le chant à basse fréquence du rorqual commun, l'amortissement de l'onde est principalement attribué à la présence d'acide borique dans l'eau de mer provenant de l'érosion de roches magmatiques.

L'acide borique a pour formule $B(OH)_3$. Le pH de l'eau de mer varie entre 7,5 et 8,4 selon notamment les mers et les océans. L'un des équilibres qui gouverne l'amortissement des ondes sonores à basse fréquence a pour équation :



Cet équilibre met en jeu l'ion tétrahydroxyborate $B(OH)_4^-(aq)$, qui sera appelé ion borate par la suite.

On suppose que cette réaction est modélisée à l'échelle microscopique par deux actes élémentaires opposés de constantes de vitesse respectives k_1 pour le sens direct et k_2 pour le sens inverse.

Les notations suivantes sont proposées pour alléger l'écriture des équations : $[B(OH)_3] = a$, $[HO^-] = b$ et $[B(OH)_4^-] = x$.

Données : $k_1 = 1,2 \cdot 10^7 L \cdot mol^{-1} \cdot s^{-1}$ et $k_2 = 48 s^{-1}$.

30. Exprimer la vitesse volumique de réaction v en fonction de a , b , x et des constantes de vitesse k_1 et k_2 .

Supposons le système à l'équilibre chimique. Celui-ci est perturbé par la variation locale de pression provoquée par le passage d'une onde acoustique. On suppose tout d'abord que la perturbation est brève et de faible amplitude, ce qui revient à considérer l'application d'un petit échelon de pression à l'instant $t = 0$. L'équilibre étant déplacé, le système se trouve transitoirement hors d'équilibre et évolue vers un nouvel état d'équilibre. Ce retour vers un état d'équilibre chimique est appelé relaxation.

Soient a_0 , b_0 et x_0 les valeurs de a , b et x juste après la perturbation (l'état initial est donc hors équilibre). À un instant $t > 0$ et à l'état d'équilibre final, les valeurs de a , b et x seront notées respectivement :

$$a = a_0 + \Delta a ; b = b_0 + \Delta b ; x = x_0 + \Delta x$$

$$a_e = a_0 + \Delta a_e ; b_e = b_0 + \Delta b_e ; x_e = x_0 + \Delta x_e$$

Dans le cas d'un échelon de pression, Δa_e , Δb_e et Δx_e sont des constantes.

31. Etablir la relation entre les grandeurs à l'équilibre a_e , b_e , x_e et les constantes de vitesse k_1 et k_2 .

32. Dédire d'un bilan de matière les relations qui lient Δa , Δb et Δx d'une part, et Δa_e , Δb_e et Δx_e d'autre part. Établir les relations :

$$a_0 = a_e + \Delta x_e ; b_0 = b_e + \Delta x_e$$

$$a = a_e - \Delta x + \Delta x_e ; b = b_e - \Delta x + \Delta x_e$$

33. En supposant que les perturbations Δx_e et Δx sont très petites (on pourra systématiquement négliger les termes en $(\Delta x)^2$, $(\Delta x_e)^2$ et $\Delta x \Delta x_e$), établir l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\Delta x}{dt} + \frac{\Delta x}{\tau} = \frac{\Delta x_e}{\tau}$$

Dans cette équation, la constante τ vérifie la relation :

$$\frac{1}{\tau} = k_1(a_e + b_e) + k_2$$

34. Résoudre cette équation différentielle et tracer l'allure de la courbe donnant les variations de Δx en fonction du temps pour $t > 0$ en supposant $\Delta x_e > 0$.

Le passage d'une onde sonore de pulsation ω provoque une perturbation sinusoïdale au lieu d'un échelon de pression. Il apparaît alors un terme de forçage sinusoïdal au second membre de l'équation différentielle, qui devient, en notation complexe :

$$\frac{d\Delta x}{dt} + \frac{\Delta x}{\tau} = \frac{\Delta x_e}{\tau}$$

Avec $\Delta x_e = A_0 \cdot e^{i\omega t}$ où A_0 est une constante et i l'imaginaire pur tel que $i^2 = -1$.

35. Le système se comporte comme un filtre. Établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{\Delta x} / \underline{\Delta x_e}$ sous la forme :

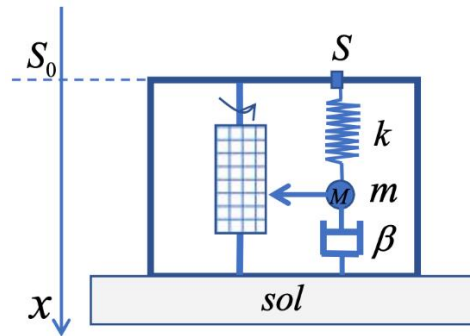
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + i \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Identifier H_0 et ω_0 .

36. Établir l'expression du gain G et de la pulsation de coupure à -3 dB notée ω_c . On rappelle qu'il s'agit de la pulsation pour laquelle le gain est égal au gain maximal divisé par $\sqrt{2}$. En justifiant la réponse, identifier la nature du filtre (passe-bas, passe-haut ou passe-bande).

37. Pour une valeur océanique typique du pH égale à 8,0, $a_e = 3,4 \cdot 10^{-4} mol \cdot L^{-1}$ et $b_e = 1,0 \cdot 10^{-6} mol \cdot L^{-1}$. Calculer numériquement la fréquence de coupure f_c . Comparer cette valeur à la fréquence du chant de basse fréquence du rorqual commun. En déduire une estimation qualitative de l'importance de l'amortissement du chant de basse fréquence du rorqual commun.

3. Étude d'un sismographe



On modélise un sismographe par un pendule élastique vertical dont l'extrémité supérieure S est fixée au boîtier de l'instrument, lui-même solidaire du sol. Le pendule est constitué d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , et d'une masse m dont le centre d'inertie sera noté M . La masse est également soumise à une force de frottement visqueux de la forme $-\beta \cdot \vec{v}$ (assimilée à l'action d'un piston solidaire du boîtier) : dans cette expression, β est une constante et \vec{v} est la vitesse de la masse par rapport à S . À l'instant initial, l'altitude du point S coïncide avec celle d'un point S_0 fixe dans un référentiel R_0 galiléen.

On pourra utiliser le repère (S_0, x, y, z) associé à R_0 . L'axe (x) est orienté à la verticale vers le bas. Dans un premier temps, on étudie le mouvement du point M en l'absence de perturbation (autrement dit S est immobile dans R_0). On note X la distance SM et g l'intensité de la pesanteur.

38. Quelle est l'expression X_{eq} de X à l'équilibre ?
 39. La masse est lâchée en dehors de sa position d'équilibre. Etablir l'équation différentielle de son mouvement, à laquelle obéit la fonction $X(t)$. On pose $Y=X-X_{eq}$. Montrer que l'équation différentielle précédente peut s'écrire sous la forme :

$$\ddot{Y} + 2\lambda\dot{Y} + \omega_0^2 Y = 0$$

où l'on précisera les expressions des constantes λ et ω_0 en fonction de β , k et m .

40. Citer dans un autre domaine de la physique un système obéissant à une équation différentielle du même type. Décrire ce système et faire la comparaison avec le système mécanique : quel est l'équivalent de la masse, de la raideur du ressort, et du coefficient de frottement ?

On étudie maintenant la réaction du système au passage d'une onde sismique modélisée par une oscillation sinusoïdale d'amplitude a constante. L'abscisse x du point de suspension S dans le référentiel R_0 est $x_S = a \cdot \cos(\omega t)$. On note x_M l'abscisse de la masse m dans le référentiel R_0 .

41. Quel est le lien entre \ddot{x}_M , \ddot{x}_S et \ddot{X} ? Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la masse m dans le référentiel galiléen R_0 et en déduire l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{Y} + 2\lambda\dot{Y} + \omega_0^2 Y = a\omega^2 \cos(\omega t)$$

En régime forcé (ou permanent), on pose $Y(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, où φ est une constante. D'autre part, on introduit la pulsation relative $u = \omega/\omega_0$ et le facteur de qualité $Q = \omega_0/2\lambda$.

42. Montrer que l'amplitude A des oscillations forcées de la masse est donnée par :

$$A = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2 u^2}}}$$

43. Montrer que l'amplitude A est maximale pour une certaine valeur u_{max} de u que l'on exprimera en fonction de Q .
 44. On mesure $u_{max} = 1,192$, $k = 0,50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $m = 200 \text{ g}$. En déduire la valeur du facteur de qualité Q et une valeur approximative du coefficient de frottement β .
 45. Quelles sont les valeurs de l'amplitude des oscillations de la masse dans les deux cas limites : d'une part, $u \ll 1$ et $u \gg 1$ d'autre part ? Expliquer qualitativement le résultat obtenu dans chaque cas.

On peut considérer une onde sismique réelle comme une superposition d'ondes sinusoïdales de pulsations comprises entre deux valeurs données ω_{min} et ω_{max} . On rappelle que le but d'un sismographe est d'enregistrer le plus fidèlement possible les mouvements verticaux du sol.

46. Comment faut-il choisir ω_0 par rapport aux valeurs ω_{min} et/ou ω_{max} pour fabriquer un sismographe ?