

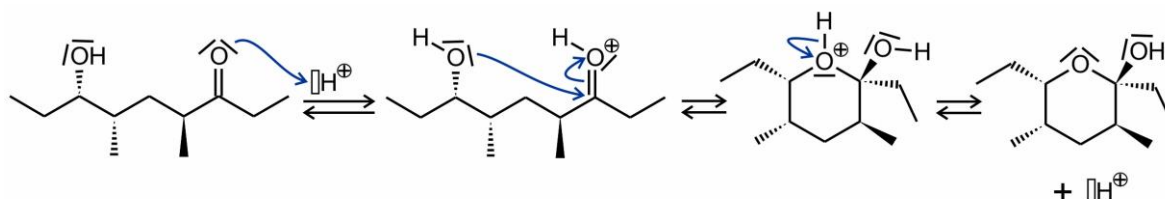
Corrigé DS7 – 12 mars 2022

1. Synthèse de la serricornine

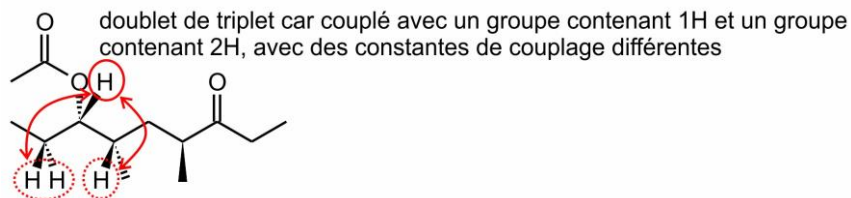
(le corrigé de ce problème est rédigé à partir d'une base rédigée par Y. Loquais et L. Nouvel)

A - Autour de la serricornine

- Nom de la forme linéaire de la serricornine : 7-hydroxy-4,6-diméthylnonan-3-one
- Avec la numérotation de la nomenclature systématique, l'ordre de préséance des substituants du carbone C⁷ est : O > C⁶ > C⁸ > H. Le stéréodescripteur du carbone C⁷ est (S).
- Mécanisme de l'hémiacétalisation :



- Mécanisme de la formation de la serricornine acétylée : AN + E + AB (acylation d'un alcool). La triéthylamine joue le rôle de base. Elle permet de déprotoner le dernier intermédiaire réactionnel afin d'obtenir l'ester.
- Attribution du signal de RMN ¹H :



- Bande à 1735 cm⁻¹ : vibration de la liaison C=O de la fonction ester
Bande à 1715 cm⁻¹ : vibration de la liaison C=O de la fonction cétone

B - Synthèse de R. A. Pilli et M. M. Murta (1988)

- Formation d'un énolate nucléophile [2] par déprotonation en alpha du groupe carbonyle :

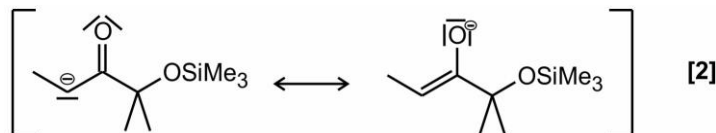
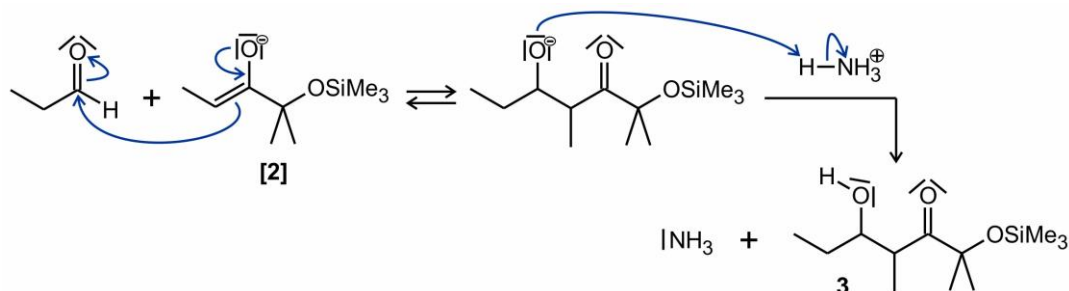
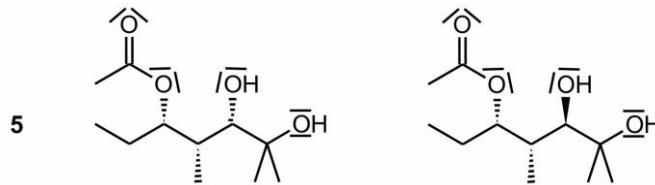


Schéma mécanistique de la formation de **3** : il s'agit d'une aldolisation



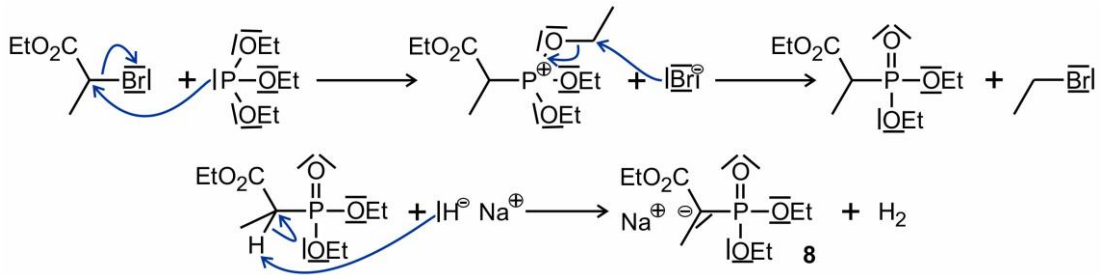
8. Deux diastéréoisomères de l'espèce chimique **5** peuvent être obtenus lors de cette étape :



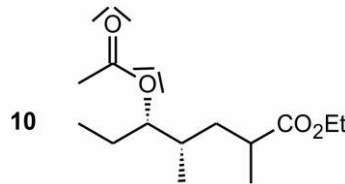
9. Pour obtenir l'espèce chimique **7**, on peut utiliser le periodate de sodium NaIO_4 afin d'opérer un clivage oxydatif du diol. Le sous-produit est la propanone :



10. Pour préparer le réactif **8**, on peut proposer la séquence réactionnelle suivante :

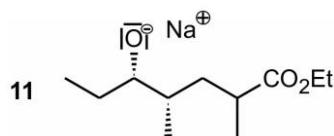


11. Structure du composé **10** obtenu par hydrogénation de la double liaison C=C :

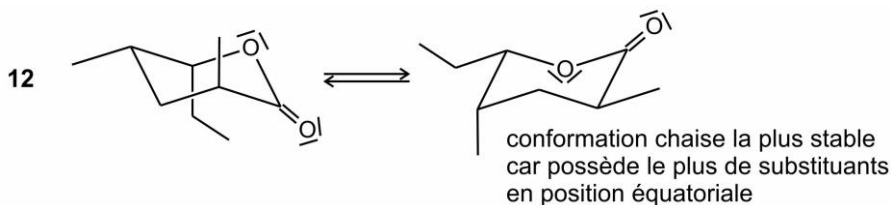


12. Pour préparer une solution de méthanolate de sodium (MeONa) dans le méthanol (MeOH), on peut ajouter à du méthanol du sodium solide (réaction d'oxydoréduction : $\text{MeOH} + \text{Na}(s) = \text{MeONa} + 1/2\text{H}_2(g)$) ou de l'hydruide de sodium solide (réaction acide-base : $\text{MeOH} + \text{NaH}(s) = \text{MeONa} + \text{H}_2(g)$).

13. Structure de l'intermédiaire [11] obtenu par transestérification :



14. Représentation des conformations chaise de **12** :



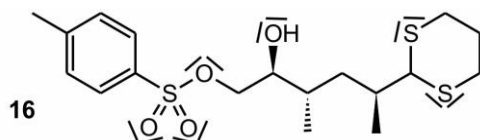
15. Pour préparer le bromure d'éthylmagnésium, on peut introduire une solution de bromoéthane sur du magnésium en copeaux. Précautions opératoires :

- solvant anhydre, polaire, aprotique, base de Lewis
- verrerie sèche
- utilisation d'une garde à CaCl_2 anhydre ou d'un balayage par un gaz inerte
- ajout goutte à goutte de la solution de bromoéthane sur le magnésium

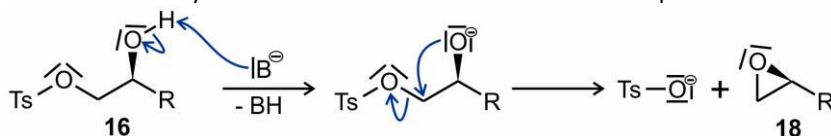
C - Synthèse de M. Mori, T. Chuman, K. Katö et K. Mori (1982)

16. Pour préparer le composé **15**, et par analogie avec la réaction d'acétalisation, on peut utiliser du 1,3-propanedithiol (réactif **14**) en présence d'une quantité catalytique d'APTS. Un montage de Dean-Stark permet d'éliminer l'eau au cours de la transformation pour améliorer son rendement.
17. Le composé **15** possède deux fonctions alcool pouvant réagir avec le chlorure de tosylo. L'emploi d'un seul équivalent de TsCl permet de transformer sélectivement la fonction alcool la plus accessible (réaction sous contrôle cinétique stérique). Cette transformation permet de transformer le groupe hydroxy en bon groupe partant.

Structure du composé **16** :

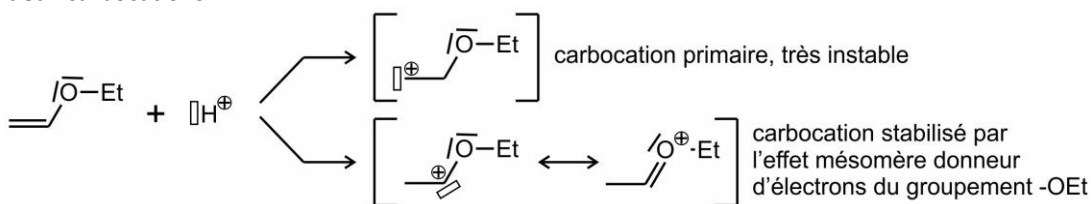


18. Une base est nécessaire pour déprotoner l'alcool restant. L'alcoolate agit sur le groupe tosylo pour conduire à l'époxyde. Le réactif **17** est une base comme l'hydruide de sodium *NaH*. Schéma mécanistique :



19. Le réactif **19** peut être le bromure de méthylmagnésium CH_3MgBr . L'ouverture de l'époxyde se fait par $\text{S}_\text{N}2$, mécanisme sous contrôle stérique. L'organomagnésien agit préférentiellement sur le carbone le plus accessible de la fonction époxyde.

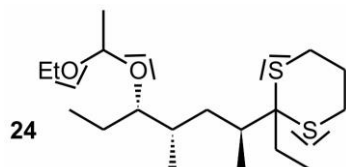
20. Structure des deux carbocations :



L'acte élémentaire cinétiquement déterminant est ici la formation du carbocation. Cet acte élémentaire présente un état de transition tardif : le complexe activé a une structure proche de celle du produit de l'acte élémentaire (ie le carbocation). Ainsi, l'état de transition est proche en énergie du carbocation (postulat de Hammond). L'identification du carbocation le moins instable permet de connaître la voie associée à l'énergie d'activation la plus faible. Sous contrôle cinétique, le produit majoritaire est celui formé le plus rapidement, et par conséquent, ici, celui formé à partir du carbocation stabilisé par délocalisation électronique. Ce résultat est en accord avec la structure fournie pour l'espèce chimique **23**.

Cette transformation permet de protéger la fonction alcool du composé **21** en formant un acétal. Cela permet d'éviter la formation d'un étheroxyde en cette position lors de l'étape suivante de la synthèse puisque le butyllithium pourrait déprotoner l'alcool, donnant un alcoolate très bon nucléophile.

21. Structure de l'espèce **24** : la déprotonation du dithioacétal par le butyllithium fournit un nucléophile qui agit sur l'halogénalcane électrophile *Et - I*.



22. Pour obtenir la serricornine, il reste à :

- déprotéger la fonction alcool protégée sous la forme d'un acétal (hydrolyse acide : excès d'eau + chauffage + acide),
- déprotéger la fonction cétone protégée sous la forme d'un dithioacétal (HgO , H_2O d'après le document 2).

2. Propagation du son émis par un roqual

(le corrigé de ce problème est rédigé à partir d'une base rédigée par C. Chevalier et S. Redoglia)

A - Propagation du son dans l'océan

23. Indice optique :

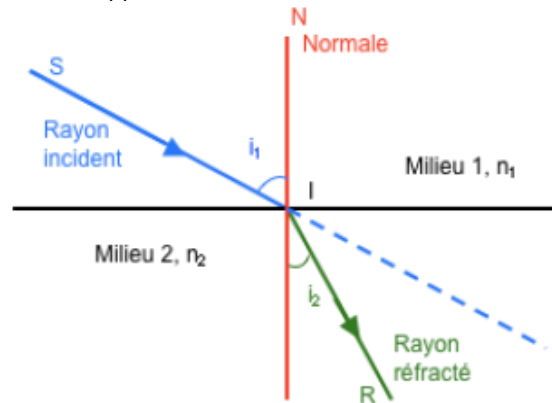
$$n = \frac{c}{v}$$

Lois de Descartes :

- le rayon réfracté appartient au plan d'incidence défini à partir de la normale au dioptre et du rayon incident.
- les angles d'incidence i_1 et de réfraction i_2 vérifient :

$$n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2$$

Dans le cas où $n_1 < n_2$, le rayon réfracté se rapproche de la normale :



La situation précédente ne permet pas d'observer une réflexion totale puisque ce phénomène est observé lorsque le rayon réfracté s'écarte plus de la normale au dioptre que le rayon incident.

Il y a réflexion totale si $n_1 > n_2$ et $i_{\text{réfracté}} > \pi/2$: $i_1 > i_{\text{inc,lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

24. Indice de réfraction acoustique :

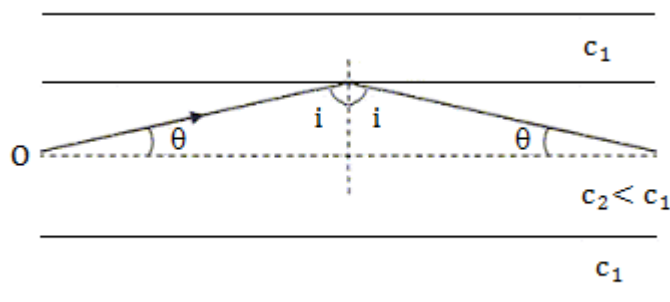
$$n = \frac{c_0}{c_i}$$

25. Attention : les indices des milieux diffèrent ici de ceux adoptés dans la question 23 : le rayon incident se propage dans le milieu d'indice n_2 avant d'atteindre le dioptre acoustique de séparation avec le milieu d'indice n_1 .

Ici $c_2 < c_1$, alors $n_2 > n_1$: le rayon se propageant du milieu « 2 » vers le milieu « 1 » passe d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent : une réflexion totale peut être observée à condition que :

$$i_2 \geq \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \arcsin\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$$

Schéma :



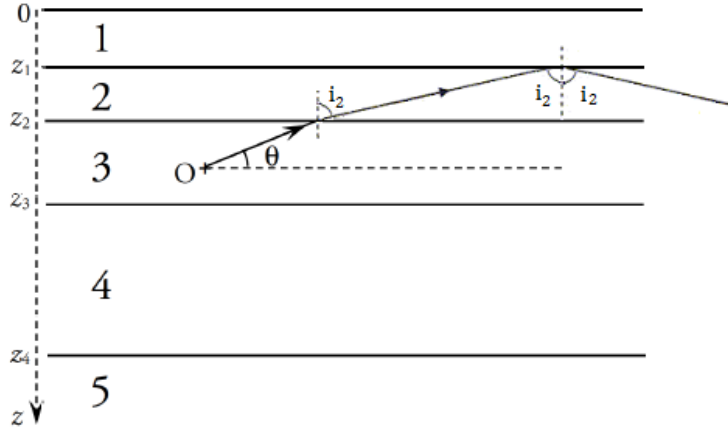
L'angle i_2 est d'autant plus grand que l'angle θ est faible.

Dans le triangle rectangle présenté sur le schéma précédent, $\pi/2 = i_2 + \theta$. Il y a réflexion totale sur le dioptre 1/2 si :

$$\theta = \pi/2 - i_2 \Rightarrow \boxed{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{c_2}{c_1}\right)} \quad AN : \underline{0 \leq \theta \leq 11,5^\circ}$$

La situation sur le dioptre 2/3 est identique puisque les célérités des ondes acoustiques ont été choisies comme identiques dans les couches 1 et 3.

26. Schéma :



Par analogie avec ce qui précède, le rayon reste **confiné dans la couche 3** si :

$$\boxed{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{c_3}{c_2}\right)} \quad AN : \underline{0 \leq \theta \leq 6,6^\circ}$$

Le rayon reste **confiné dans les couches 2, 3 et 4** si :

- il traverse le dioptre 2/3 (l'angle d'incidence doit être inférieur à l'angle de réfraction limite) soit :

$$\boxed{\theta \geq \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{c_3}{c_2}\right)} \quad AN : \underline{\theta \geq 6,6^\circ}$$

- et il est totalement réfléchi sur le dioptre 1/2, soit :

$$\boxed{i_2 \geq \arcsin\left(\frac{c_2}{c_1}\right)}$$

or :

$$\sin(i_2) = \frac{c_2}{c_3} \cdot \sin(i_3) = \frac{c_2}{c_3} \cdot \cos(\theta) \Rightarrow \boxed{\theta \leq \arccos\left(\frac{c_3}{c_1}\right)} \quad AN : \underline{\theta \leq 11,4^\circ}$$

27. Variation continue de la vitesse du son : profil d'ondulations.



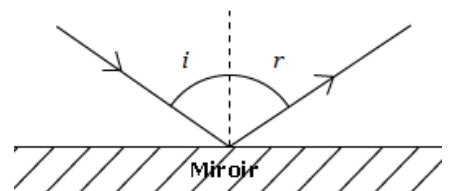
28. Coefficient de réflexion en puissance :

$$\boxed{R = \left(\frac{\rho_2 \cdot c_2 - \rho_1 \cdot c_1}{\rho_2 \cdot c_2 + \rho_1 \cdot c_1}\right)^2} \quad AN : \underline{R = 1,0}$$

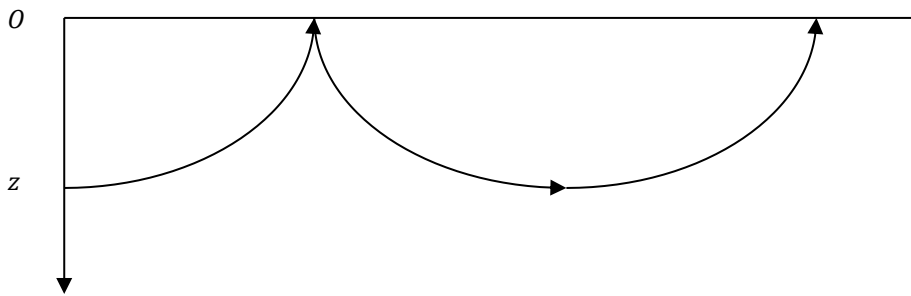
Il y a **réflexion totale** de l'onde acoustique sur l'interface eau/air puisque l'intégralité de la puissance est réfléchie.

Lois de Descartes :

- le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence défini à partir de la normale au dioptre et du rayon incident.
- les angles d'incidence i et de réflexion r vérifient : $\boxed{i = r}$



29. Dans la situation aux pôles, la vitesse diminue lorsque le rayon s'approche de la surface. Par conséquent, l'indice optique augmente et le rayon se rapproche progressivement de la normale lorsqu'il monte, mais s'en écarte lorsqu'il redescend jusqu'à devenir horizontal.



B - Amortissement du son de basse fréquence dans les océans

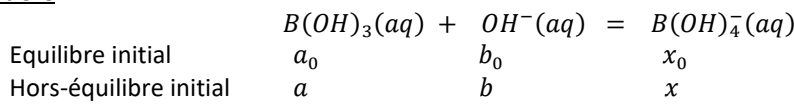
30. Vitesse de réaction :

$$v = \frac{dx}{dt} = v_1 - v_2 = k_1 \cdot a \cdot b - k_2 \cdot x$$

31. À l'équilibre chimique :

$$v = 0 \Leftrightarrow a_e \cdot b_e = \frac{k_2}{k_1} \cdot x_e$$

32. Bilan de matière :



En notant ξ l'avancement volumique, $a = a_0 - \xi$, $b = b_0 - \xi$ et $x = x_0 + \xi$

Les notations proposées pour les variations de concentrations sont telles que :

$$\begin{aligned} \Delta a &= a - a_0 = -\xi \\ \Delta b &= b - b_0 = -\xi \\ \Delta x &= x - x_0 = \xi \end{aligned}$$

$$\Delta a = \Delta b = -\xi = -\Delta x$$

$$\begin{cases} a = a_0 + \Delta a \\ b = b_0 + \Delta b \\ x = x_0 + \Delta x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_e = a_0 + \Delta a_e \\ b_e = b_0 + \Delta b_e \\ x_e = x_0 + \Delta x_e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = a_e + \Delta x_e \\ b_0 = b_e + \Delta x_e \\ a = a_e + \Delta x_e - \Delta x \\ b = b_e + \Delta x_e - \Delta x \end{cases}$$

33. En injectant les expressions précédentes dans l'expression de la vitesse :

$$v = \frac{dx}{dt} = k_1 \cdot a \cdot b - k_2 \cdot x$$

$$\frac{d(x_0 + \Delta x)}{dt} = \frac{d\Delta x}{dt} = k_1 \cdot (a_e + \Delta x_e - \Delta x) \cdot (b_e + \Delta x_e - \Delta x) - k_2 \cdot (x_e - \Delta x_e + \Delta x)$$

En négligeant les termes en $(\Delta x)^2$, $(\Delta x_e)^2$ et $\Delta x \cdot \Delta x_e$:

$$\frac{d\Delta x}{dt} + (k_1 \cdot (a_e + b_e) + k_2) \cdot \Delta x = k_1 \cdot (a_e \cdot b_e + (a_e + b_e) \cdot \Delta x_e) - k_2 \cdot (x_e - \Delta x_e)$$

Et en utilisant la relation de la question 31 :

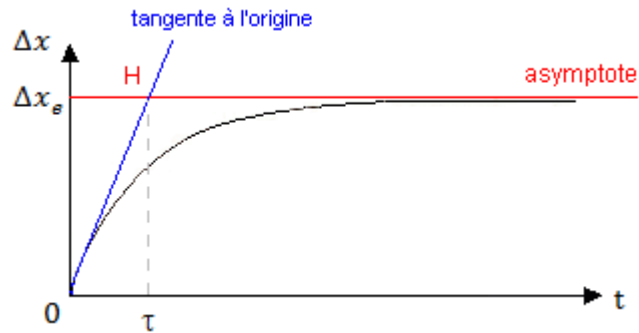
$$\frac{d\Delta x}{dt} + (k_1 \cdot (a_e + b_e) + k_2) \cdot \Delta x = (k_1 \cdot (a_e + b_e) + k_2) \cdot \Delta x_e$$

$$\frac{d\Delta x}{dt} + \frac{\Delta x}{\tau} = \frac{\Delta x_e}{\tau}$$

34. Résolution :

$$\Delta x = \Delta x_e \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

Allure :



35. Notations complexes :

$$\frac{d\Delta x}{dt} = i \cdot \omega \cdot \Delta x \quad \frac{d\Delta x_e}{dt} = i \cdot \omega \cdot \Delta x_e$$

Ce qui permet de réécrire l'équation différentielle :

$$i \cdot \omega \cdot \Delta x + \frac{1}{\tau} \cdot \Delta x = \frac{1}{\tau} \cdot \Delta x_e$$

D'où la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\Delta x}{\Delta x_e} = \frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau} + i \cdot \omega} \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + i \cdot \omega \cdot \tau}$$

Par identification :

$$\underline{H}_0 = 1 \quad \omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

36. Gain :

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \cdot \tau)^2}}$$

Les limites du gain à basse et haute fréquence : $G \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 1$ $G \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$

Il s'agit donc d'un filtre **passé-bas**.

Pulsation de coupure, solution de l'équation $G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

37. AN : $\tau = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ $\omega_c = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ $f_c = 6,6 \cdot 10^2 \text{ Hz}$

Le chant de basse fréquence du rorqual correspond à un intervalle [16 – 24 Hz] : cet intervalle est **compris dans la bande passante** du filtre, donc le chant de basse fréquence du rorqual est **très peu amorti** par ce phénomène.

3. Étude d'un sismographe

Remarque générale : Dans ce problème, le référentiel R_0 lié au point S_0 est solidaire de la Terre : il sera considéré comme galiléen le temps de l'étude. En revanche, le référentiel R lié à S peut, dans le cas où le sol est perturbé par une onde sismique, être en mouvement par rapport au référentiel R_0 . Dans la première partie de l'étude, il n'est pas question d'onde sismique. Les référentiels R_0 et R coïncident.

Lorsque le sol est perturbé par une onde sismique, le référentiel R est mouvement de translation par rapport au référentiel R_0 . De ce fait, l'accélération d'un point M par rapport au référentiel R et celle de M dans le référentiel R_0 sont reliées par la relation suivante, faisant intervenir un terme dit « d'accélération d'entraînement » de R par rapport à R_0 :

$$\vec{a}_{M/R_0} = \vec{a}_{M/R} + \vec{a}_{R/R_0}$$

Ceci interviendra dans la seconde partie de l'étude.

38. Lorsque le système {masse m } est à l'équilibre dans le référentiel R_0 supposé galiléen, il est seulement soumis à son poids \vec{P} et à la force de rappel du ressort \vec{T} :

- poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_x$
- force de rappel du ressort $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{ext} = -k(X - \ell_0)\vec{u}_x$

La condition d'équilibre implique alors :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

En projection selon \vec{u}_x ,

$$mg - k(X - \ell_0) = 0$$

$$X_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

Logiquement, la valeur obtenue X_{eq} est supérieure à ℓ_0 : le ressort est étiré sous l'effet du poids de la masse m .

39. Lorsque la masse est en mouvement (mais pas le sol), celle-ci est soumise, outre les forces précédentes, à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -\beta \vec{v}$ avec $\vec{v} = \frac{dSM}{dt} = \dot{X}\vec{u}_x$.

Dans le référentiel galiléen R_0 , le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}$$

En projection selon \vec{u}_x ,

$$m\ddot{X} = mg - k(X - \ell_0) - \beta\dot{X}$$

$$\ddot{X} + \frac{\beta}{m} \cdot \dot{X} + \frac{k}{m} \cdot X = g + \frac{k}{m} \cdot \ell_0 = \frac{k}{m} \cdot X_{eq}$$

Introduction de la variable $Y = X - X_{eq}$ telle que $\dot{Y} = \dot{X}$ et $\ddot{Y} = \ddot{X}$

$$\ddot{Y} + \frac{\beta}{m} \cdot \dot{Y} + \frac{k}{m} \cdot Y = 0$$

Par identification avec la forme canonique fournie dans l'énoncé :

$$\begin{cases} 2\lambda = \frac{\beta}{m} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\beta}{2m} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

40. Un circuit RLC soumis à un échelon de tension est également régi par une équation différentielle de ce type. Avec les notations proposées dans le cours, en orientant le générateur en convention générateur et les dipôles passifs en convention récepteur, la loi des mailles conduit à :

$$E = u_R + u_C + u_L$$

Les relations de fonctionnement des dipôles passifs (en convention récepteur) conduisent à :

$$E = R \cdot i + u_C + L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$E = R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} + L \cdot \frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{E}{L}$$

Par identification, on obtient les équivalences électromécaniques suivantes

| | Grandeur mécanique | Grandeur électrique |
|---------------------------|---------------------|---------------------|
| Position | X | q |
| Vitesse | $v = \frac{dX}{dt}$ | $i = \frac{dq}{dt}$ |
| Masse | m | L |
| Constante de raideur | k | $\frac{1}{C}$ |
| Coefficient de frottement | β | R |
| Puissance dissipée | $\beta \cdot v^2$ | $R \cdot i^2$ |

41. Le bâti du sismographe est animé d'un mouvement induit par le passage d'une onde sismique. La position et l'accélération du point M par rapport au référentiel galiléen R_0 sont données par les relations :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SM} \Rightarrow \vec{a}_M = \vec{a}_S + \vec{a}_{M/R}$$

En projection selon \vec{u}_x ,

$$\ddot{x}_M = \ddot{x}_S + \ddot{X} = -a\omega^2 \cdot \cos(\omega t) + \ddot{X}$$

Dans le référentiel galiléen R_0 , le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse devient, après projection selon \vec{u}_x :

$$m\ddot{x}_M = m(-a\omega^2 \cdot \cos(\omega t) + \ddot{X}) = mg - k(X - \ell_0) - \beta\dot{X}$$

$$\ddot{X} + \frac{\beta}{m} \cdot \dot{X} + \frac{k}{m} \cdot X = \frac{k}{m} \cdot X_{eq} + a\omega^2 \cdot \cos(\omega t)$$

Avec la variable $Y = X - X_{eq}$ telle que $\dot{Y} = \dot{X}$ et $\ddot{Y} = \ddot{X}$

$$\ddot{Y} + \frac{\beta}{m} \cdot \dot{Y} + \frac{k}{m} \cdot Y = a\omega^2 \cdot \cos(\omega t)$$

42. En introduisant la notation complexe $\underline{Y} = A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$, il vient :

$$(-\omega^2 + j2\lambda\omega + \omega_0^2) \cdot \underline{Y} = \omega^2 a e^{j\omega t}$$

$$\underline{Y} = \frac{\omega^2 a e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \cdot 2\lambda\omega} = \frac{a e^{j\omega t}}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + j \cdot \frac{2\lambda}{\omega}}$$

43. Le module de l'expression renvoie l'amplitude des oscillations en posant $Q = \frac{1}{2\lambda}$:

$$A(u) = |\underline{Y}| = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2 u^2}}}$$

44. Le numérateur est une constante positive. D'autre part, la fonction « racine carrée » est croissante. Par conséquent, l'amplitude A est maximale lorsque le terme $g(u) = \left(\frac{1}{u^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2 u^2}$ est minimal. Il n'apparaît pas de valeur évidente pour laquelle $g(u) = 0$ ce qui oblige à faire l'étude des variations de $g(u)$.

$$g'(u) = 2 \left(\frac{-2}{u^3}\right) \left(\frac{1}{u^2} - 1\right) - \frac{2}{Q^2 u^3}$$

$$g'(u) = -\frac{2}{u^3} \left(2 \cdot \left(\frac{1}{u^2} - 1\right) + \frac{1}{Q^2}\right)$$

Le premier facteur est strictement négatif. Le second change de signe en une valeur de u telle que :

$$\frac{1}{u^2} = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Cette valeur de u existe si $1 > \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Si cette condition est vérifiée, alors,

$$u_{max} = \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

45. Application numérique :

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2 - \frac{2}{u_{max}^2}}} = 1,3$$

$$\beta = \frac{\sqrt{km}}{Q} = 0,24 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

46. Étude asymptotique :

- Si $u \ll 1$ (limite basse fréquence $u \rightarrow 0$) : $A = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2 u^2}}} \approx \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}}} \cdot u \rightarrow 0$: si la fréquence d'oscillation du sol est trop faible, alors la distance SM reste constante. L'enregistrement correspond à une ligne horizontale.
- Si $u \gg 1$ (limite haute fréquence $u \rightarrow \infty$) : $A = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2 u^2}}} \approx a$: si la fréquence d'oscillation du sol est très grande, alors la distance SM reste constante mais non nulle. Le sismographe enregistre alors fidèlement les oscillations du sol.

47. D'après ce qui précède, on souhaite que la condition $u \gg 1$ soit vérifiée quelle que soit la pulsation des ondes sismiques. Il faut donc $u = \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ à la fois pour $\omega = \omega_{min}$ et $\omega = \omega_{max}$. Par conséquent :

$$\omega_0 \ll \min(\omega_{min}, \omega_{max})$$