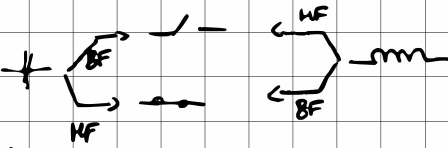
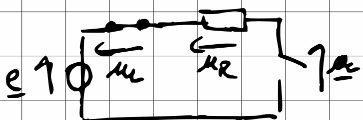
DM3 – 21x22

1) Domaine de l'audible $= [20\,\mathrm{Hz} ; 20\,\mathrm{kHz}]$.

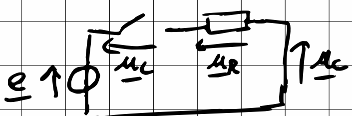
2) Équivalents HF/BF des dipôles.





Basse fréquence

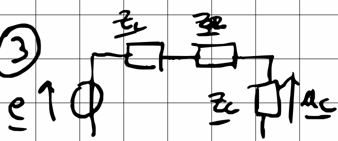
$$\underline{e} = \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\underline{u_L}} + \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\underline{u_R}} + \underline{u_C} \Rightarrow \underline{u_C} = \underline{e}.$$



Haute fréquence $\underline{u_C} = 0$ (tension aux bornes d'un fil)

On est donc tenté de conclure à un comportement passe-bas.

3)



PDT $\quad \underline{H} = \dfrac{\underline{u_C}}{\underline{u_e}} = \dfrac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_L} + \underline{Z_C}} = \dfrac{1}{\frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_C}} + \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_C}} + 1}$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega + jL\omega . jC\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Par identification,

$$H_0 = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1}{\omega_0}\right)^2 &= LC \\ \frac{1}{Q\omega_0} &= RC \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \omega_0 &= 1/\sqrt{LC} \\ Q &= \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\sqrt{LC}}{RC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \end{aligned}$$

4) Facteur d'amplification $\quad G(\omega) = |\underline{H}| = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$

En posant $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ (pulsation réduite) $\quad G(x) = \left((1-x^2)^2 + \dfrac{1}{Q^2}x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$G(x) = \left((1-x^2)^2 + \frac{1}{Q^2}x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

La fonction $G(x)$ admet un extrêmum si $G'(x)$ s'annule.

$$G'(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}\left[-2(1-x^2)\times 2x + \frac{2}{Q^2}x\right]}_{= 2(1-x^2)x + \frac{x}{Q^2} = x\left(2 - 2x^2 + \frac{1}{Q^2}\right)} \underbrace{\left[(1-x^2)^2 + \frac{1}{Q^2}x^2\right]^{-3/2}}_{\text{Terme tjs positif (somme des carrés)}}$$

La dérivée s'annule si $x = 0$ ou $\underbrace{2x^2 = 2 - \frac{1}{Q^2}}$.

possible uniquement si

$$2 - \frac{1}{Q^2} > 0 \Rightarrow 2 > \frac{1}{Q^2}$$

$$\Rightarrow Q^2 > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q > 1/\sqrt{2}}$$

Cet extrêmum est-il un maximum ou un minimum ?

La dérivée $G'(x)$ est du signe de $x\left(2 - 2x^2 + \frac{1}{Q^2}\right)$.

x : tjs $\oplus$

$\left(2 - 2x^2 + \frac{1}{Q^2}\right)$: $\oplus$ si x petit, $\ominus$ si x grand.

Tableau de variation si $Q > 1/\sqrt{2}$

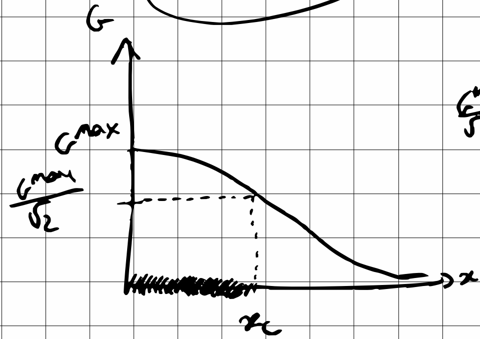
x	0		$\sqrt{1+\frac{1}{2Q^2}}$		$+\infty$
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
$G(x)$	1	$\nearrow$	G^{max}	$\searrow$	0

$$2x^2 = 2 + \frac{1}{Q^2}$$

$$x^2 = 1 + \frac{1}{2Q^2}$$

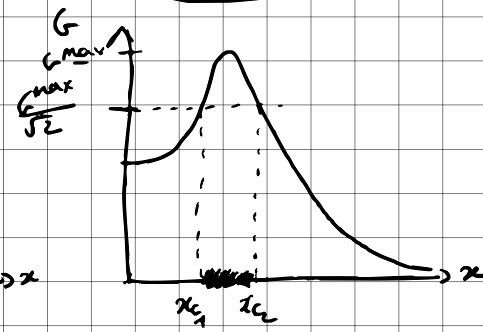
Allure de la courbe de gain

si $Q \leq 1/\sqrt{2}$



PASSE-BAS

si $Q > 1/\sqrt{2}$



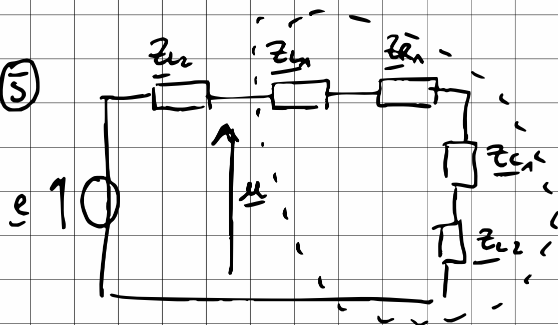
PASSE-BANDE

Situation cohérente avec le fonctionnement de l'oreille

BP = [20 Hz ; 20 kHz]

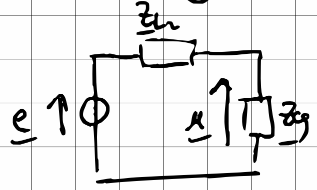
⟹ existence de 2 fréq. coupure.

(5)



$$\underline{Z_{eq}} = R_1 + jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega}$$

⇓



PDT : $$\frac{\underline{u}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}} + \underline{Z_{L_2}}}$$

$$\frac{\underline{u}}{\underline{e}} = \frac{R_1 + jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega}}{jL_2\omega + R_1 + jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega}}.$$

$$\frac{\underline{u}}{\underline{e}} = \frac{R_1 + j\left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega} - \frac{1}{C_2\omega}\right)}{R_1 + j\left((L_1+L_2)\omega - \frac{1}{C_1\omega} - \frac{1}{C_2\omega}\right)}.$$

Passage au module

$$\left|\frac{\underline{u}}{\underline{e}}\right| = \sqrt{\frac{R_1^2 + \left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega} - \frac{1}{C_2\omega}\right)^2}{R_1^2 + \left((L_1+L_2)\omega - \frac{1}{C_1\omega} - \frac{1}{C_2\omega}\right)^2}}$$

__AN__ : $\omega = 2\pi f$

$$\xrightarrow{3\,kHz} 18{,}8.10^3\ rad.s^{-1}$$

$$\xrightarrow{5\,kHz} 31{,}4.10^3\ rad.s^{-1}$$

$$\left|\frac{\underline{u}}{\underline{e}}\right| = \underbrace{1{,}3 \text{ pour } f = 3\,kHz}_{G>1 \text{ : le signal est amplifié}} \quad \text{et} \quad \underbrace{0{,}64 \text{ pour } f = 5\,kHz}_{G<1 \text{ : le signal est atténué}}$$

⑥ L'allure de la courbe confirme le calcul précédent. Le canal auditif amplifie les basses fréquences mais atténue légèrement les hautes fréquences.