

PHYSIQUE-CHIMIE
Analyse de documents scientifiques
Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui vérifiera et éventuellement remplacera le sujet. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Thème : La coulée de lave Kaupulehu du volcan Hualalai à Hawaï

La coulée de lave Kaupulehu résulte d'une éruption du volcan hawaïen Hualalai en 1800 ou peut-être quelques années avant cette date. Le sujet propose de reconstituer certains caractères de cette coulée à l'aide notamment d'un modèle simplifié d'écoulement de lave. Un lexique est présenté en annexe en fin d'énoncé.

L'analyse proposée dans le sujet s'appuie sur sept documents scientifiques présentés ci-dessous. Elle mobilise également les acquis personnels dans le cadre de la préparation au concours. Le candidat est invité à lire attentivement les documents avant de répondre aux questions.

Documents scientifiques

Document 1 : Modèle de chenal

Le schéma d'un canal incliné de section rectangulaire est présenté sur la **Figure 1**. On note ℓ sa largeur et θ l'angle d'inclinaison. L'axe Oz est orthogonal au fond du canal et fait donc un angle θ avec la verticale. Il est dirigé vers le haut. La profondeur de lave dans le chenal est notée d . Elle est comptée orthogonalement au fond du chenal.

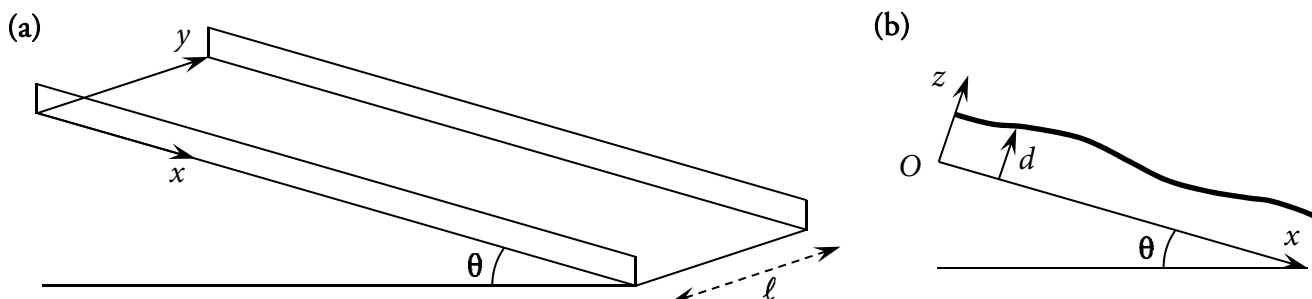


Figure 1. Schéma du canal. (a) Vue en perspective. (b) Vue en coupe dans le plan xOz .

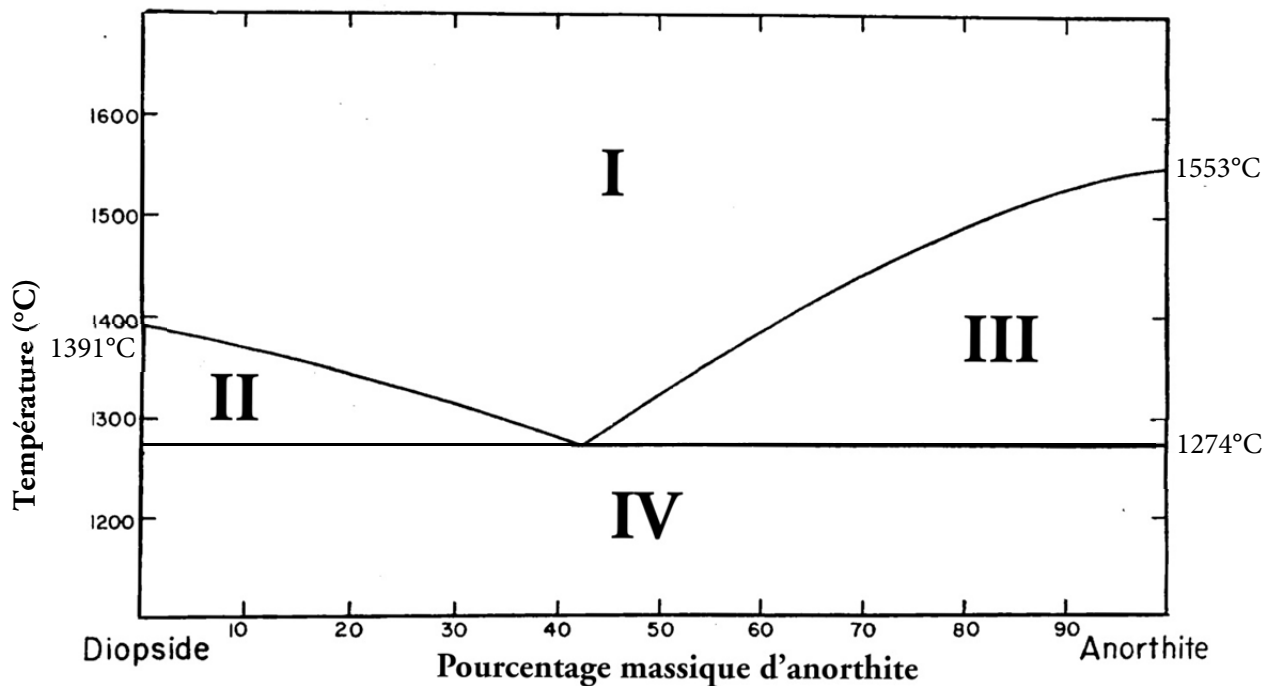


Figure 2. Diagramme solide-liquide du système diopside-anorthite.

Document 2 : Diagramme binaire diopside-anorthite

Le diagramme massique isobare solide-liquide du système diopside-anorthite est présenté sur la Figure 2.

Document 3 : Diagramme de phase de la lave

La température du liquidus du basalte de la lave de la coulée Kaupulehu est estimée à environ 1220°C et son solidus à environ 1000°C. Lors du refroidissement, les premiers cristaux qui apparaissent sont des cristaux d'olivine. Les cristaux de plagioclase apparaissent vers 1180°C et ceux de pyroxène vers 1150°C. La Figure 3 présente le pourcentage massique du total des phases cristallines en fonction de la température lors du refroidissement de la lave.

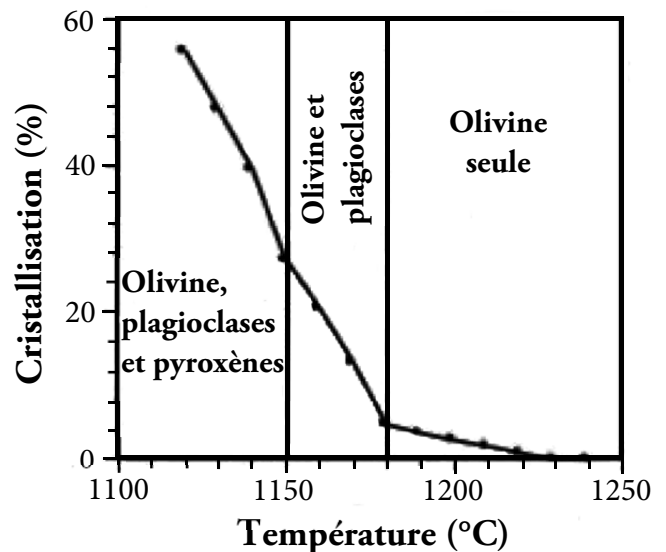


Figure 3. Diagramme de phase pour la lave de la coulée Kaupulehu avec le pourcentage en masse de cristallisation en fonction de la température.

Document 4 : Quelques données sur la coulée de lave Kaupulehu

La bouche éruptive de la coulée Kaupulehu est une fissure éruptive située un peu au nord-ouest du cratère (Figure 4). La coulée de lave est restée fluide jusqu'à la mer, qui se trouve à environ 15 km de distance de la bouche éruptive, et elle s'est poursuivie sous la mer sur plusieurs kilomètres. La coulée a en grande partie emprunté des chenaux de lave. La morphologie de la lave est essentiellement de type 'a'. La lave est un basalte alcalin à olivine de structure vitreuse incluant de petits cristaux de plagioclases, de pyroxènes et d'olivine. Il n'existe aucun témoignage écrit de première main pour cette éruption et les témoignages de seconde main

pour cette coulée ne sont pas complètement fiables. La reconstitution des caractères de la coulée Kaupulehu nécessite donc une étude géologique et l'utilisation de modèles physiques.

Zones de l'écoulement : On peut distinguer quatre zones successives sur cette coulée correspondant à des pentes différentes (Figure 4) :

- Zone 1. Longueur : 3,5 km à partir de la bouche éruptive ; angle d'inclinaison : $\theta = 12,5^\circ$.
- Zone 2. Longueur : 4 km après la zone 1 ; angle d'inclinaison : $\theta = 9,5^\circ$.
- Zone 3. Longueur : 5 km après la zone 2 ; angle d'inclinaison : $\theta = 3,8^\circ$.
- Zone 4. Longueur : 2,5 km après la zone 3 et jusqu'à la mer ; angle d'inclinaison : $\theta = 1,2^\circ$.

Analyse des pyroclastes proches de la bouche éruptive : L'analyse des pyroclastes de toutes natures à proximité de la bouche éruptive a montré la présence de cristaux d'olivine dans tous les échantillons. La présence de cristaux de plagioclases n'a été observée que dans un petit nombre d'échantillons et aucun cristal de pyroxène n'a été observé.

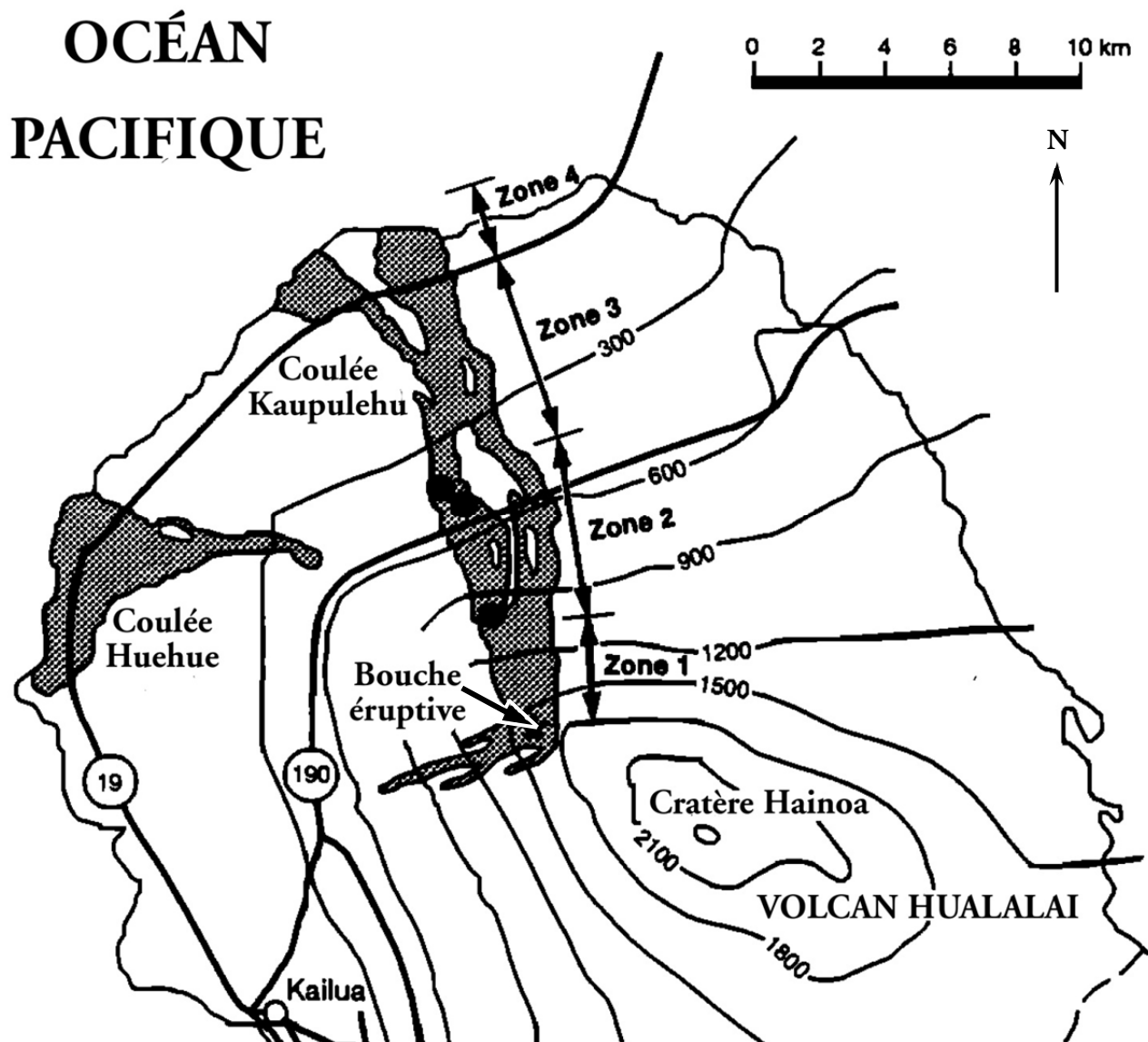


Figure 4. Carte de la coulée de lave Kaupulehu du volcan Hualalai montrant l'emplacement de la bouche éruptive et les quatre zones de la coulée. La coulée Huehue est une autre coulée de lave un peu plus tardive.

Document 5 : Données rhéologiques et thermodynamiques sur la lave

Masse volumique : $\rho = 2,6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;

Capacité thermique massique : $c = 1,0 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$;

Tant que le pourcentage de cristallisation est inférieur à environ 20–30%, la lave se comporte comme un liquide newtonien. Un modèle basé sur la composition chimique permet d'estimer la valeur de la viscosité dynamique de la lave en fonction de la température T . Lorsque toute la lave est liquide, on obtient la loi suivante, où la viscosité η est exprimée en $\text{Pa} \cdot \text{s}$ et la température en K :

$$\eta \approx 3,8 \cdot 10^{-8} \exp\left(3,05 \frac{10^4}{T}\right) \quad (1)$$

Si la lave contient un petit pourcentage de cristaux, la viscosité calculée précédemment doit être corrigée selon la loi de Roscoe

$$\eta_e = \eta(1 - 1,35 \varphi)^{-2,5}. \quad (2)$$

Dans cette expression, η_e est la viscosité effective de la lave, η est la viscosité calculée par la loi (1) et φ représente la fraction massique de solide dans la lave. Cette loi n'est valable que si φ est plus petit que 0,2 ou 0,3 environ (moins de 20% à 30% de solide). Pour des fractions massiques de solide plus grandes, la viscosité apparente augmente très vite, le comportement devient non-newtonien et la coulée de lave ralentit très fortement. Pour une fraction massique de solide supérieure à 0,5–0,6, une lave basaltique typique se comporte quasiment comme un solide.

Document 6 : Hauteurs de montée de la lave

La lave s'écoulant dans un chenal a monté des pentes sur une certaine hauteur en plusieurs endroits. Ce phénomène s'est produit notamment au niveau de virages prononcés du chenal où la lave a partiellement recouvert la rive extérieure du virage. La hauteur de montée, définie comme la différence entre la hauteur maximale atteinte par la lave et la hauteur normale de sa surface, a été mesurée en plusieurs points :

- Point M_1 . Hauteur de montée : 3,1 m ; distance de la bouche éruptive : 0,2 km.
- Point M_2 . Hauteur de montée : 2,8 m ; distance de la bouche éruptive : 3 km.
- Point M_3 . Hauteur de montée : 1,67 m ; distance de la bouche éruptive : 5,5 km.
- Point M_4 . Hauteur de montée : 0,82 m ; distance de la bouche éruptive : 8 km.

Questions

Partie 1 : Questions sur des notions du programme en lien avec le thème

1.1) Hauteur de montée

Un point matériel M de masse m et de vitesse initiale \vec{v} glisse sur un support incurvé (**Figure 5**). Tous les frottements sont négligés. Ce point matériel monte la pente, atteint une hauteur maximale et redescend en sens inverse. L'élévation maximale mesurée entre la hauteur maximale et la hauteur initiale est L . Établir l'expression de la norme v du vecteur vitesse initial en fonction des données et de l'accélération de la pesanteur g . On donne : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

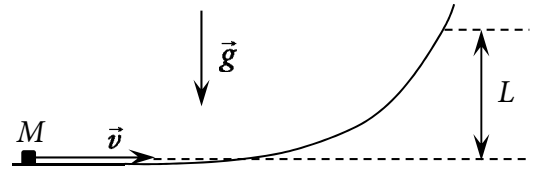


Figure 5. État initial et élévation maximale.

1.2) Écoulement laminaire à surface libre dans un canal rectangulaire incliné

On considère un liquide newtonien incompressible s'écoulant dans un canal de section rectangulaire dont le fond est incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale. On note Oz la direction orthogonale au fond du canal, d la profondeur du liquide et ℓ la largeur du canal (**Document 1**). L'écoulement est supposé laminaire et stationnaire. On le suppose aussi bidimensionnel, c'est-à-dire que les variables de l'écoulement ne dépendent pas de la coordonnée transversale y . On le suppose de plus uniforme dans la direction longitudinale Ox , c'est-à-dire que les variables de l'écoulement ne dépendent pas non plus de x . Dans ces conditions, le profil de vitesse dans la profondeur est parabolique et a pour expression

$$v(z) = \frac{\rho g z \sin \theta}{\eta} \left(d - \frac{z}{2} \right).$$

Dans cette expression, ρ est la masse volumique du liquide et η est sa viscosité dynamique.

- Établir l'expression de la vitesse moyenne sur la profondeur, notée V .
- Établir l'expression du débit volumique par unité de largeur q et celle du débit volumique total dans le canal, D_V .
- Exprimer la force tangentielle de viscosité par unité de surface s'exerçant sur le liquide au niveau du fond du canal et au niveau de la surface du liquide.

1.3) Bilan d'énergie en régime permanent

On étudie un liquide assimilé à un fluide parfait (non visqueux) incompressible et indilatable en écoulement stationnaire dans un canal incliné de section rectangulaire (**Document 1**). L'écoulement est supposé bidimensionnel comme à la **question 1.2**. Pour ce système, il n'y a pas de travail utile et on suppose que les seuls transferts thermiques sont des pertes thermiques par la surface libre. La température du liquide est supposée uniforme sur la profondeur, c'est-à-dire indépendante de z .

- Justifier le caractère conservatif du débit massique et du débit volumique.
- Pour ce type d'écoulement, on admet la validité de l'hypothèse d'une pression hydrostatique, c'est-à-dire que l'équation de la statique des fluides est supposée valable dans la direction Oz normale au fond du canal. Écrire cette équation en projection sur la direction Oz . Établir l'expression de la pression p dans le fluide en fonction de z (z est compté à partir du fond), de la profondeur de liquide d , de la masse volumique ρ du liquide, de la pression atmosphérique p_0 supposée uniforme, de g et de l'angle d'inclinaison θ du canal.
- Exprimer la pression moyenne P sur la profondeur en fonction de p_0 , ρ , g , d et θ .

- d) On considère un volume de contrôle compris entre les sections d'abscisses respectives x_1 et x_2 . Montrer que la force de pression totale s'exerçant sur une section du canal d'abscisse donnée s'exprime simplement en fonction des valeurs à cette abscisse de la pression moyenne P , de la profondeur d et de la largeur du canal ℓ .
- e) L'écoulement est maintenant supposé uniforme selon Ox (voir la **question 1.2**). Dans ces conditions, les frottements équilibrent parfaitement la composante du poids selon Ox . Pour le système ouvert constitué par le volume de contrôle défini précédemment, formuler le premier principe de la thermodynamique en termes de puissance. On notera P_{th} la puissance thermique reçue par le liquide à travers sa surface libre. Montrer qu'on peut en déduire l'équation

$$T_2 - T_1 = \frac{P_{th}}{\rho c D_V}.$$

Dans cette expression, T_1 et T_2 sont les températures du fluide aux abscisses x_1 et x_2 respectivement, D_V est le débit volumique total et c est la capacité thermique massique du liquide.

1.4) Diagramme binaire diopside-anorthite

Le diagramme massique solide-liquide isobare du système diopside-anorthite est donné dans le **Document 2**.

- Indiquer quelles sont les phases en présence dans les domaines I, II, III et IV. Positionner le liquidus et le solidus.
- Un liquide donne, après refroidissement et cristallisation complète, un mélange contenant les proportions en masse de 70% d'anorthite et 30% de diopside. Indiquer à quelle température la cristallisation a commencé.
- Indiquer à quelle température la cristallisation s'est achevée.
- Indiquer à quelle température apparaissent les premiers cristaux de diopside et à quelle température apparaissent les premiers cristaux d'anorthite.
- Calculer, à une température de 1300°C, les fractions massiques de liquide et de solide.

Partie 2 : Analyse des documents

On étudie l'écoulement de la lave dans un chenal de lave de largeur constante ℓ . Pour simplifier, on suppose que le chenal est à section rectangulaire (**Document 1**). L'écoulement est supposé stationnaire, bidimensionnel et uniforme (voir la **question 1.2**).

2.1) Température et viscosité de la lave au niveau de la bouche éruptive

- À l'aide du **Document 3** et du **Document 4**, justifier soigneusement que la température T_0 de la lave au niveau de la bouche éruptive peut être estimée à 1180°C.
- En déduire une estimation de la viscosité dynamique de la lave près de la bouche éruptive à partir du **Document 3** et du modèle présenté dans le **Document 5**.

2.2) Hypothèse d'un écoulement turbulent

- On suppose que l'écoulement est turbulent. La vitesse v est supposée constante sur la profondeur de la lave. Les parois du chenal exercent sur la lave une force de frottement par unité de masse dont l'expression est $-C_f v^2/d$ où C_f est un coefficient de frottement sans dimension. Vérifier que cette expression est bien homogène à une force par unité de masse.

- b) L'hypothèse d'un écoulement stationnaire et uniforme entraîne l'équilibre entre la force de frottement et la composante du poids selon Ox . Exprimer la composante selon Ox de la force massique de pesanteur et en déduire l'expression de la vitesse de la lave en fonction de g , d , C_f et θ . Vérifier l'homogénéité de la relation obtenue.
- c) Estimer les valeurs v_1 , v_2 , v_3 et v_4 de la vitesse de la lave dans le chenal aux points M_1 , M_2 , M_3 et M_4 respectivement, à partir des hauteurs de montée de la lave (**Document 6**). On pourra négliger tous les frottements lors de la montée de la lave et mettre en œuvre un raisonnement analogue à celui de la **question 1.1** ou utiliser la relation de Bernoulli.
- d) En déduire une estimation numérique de la valeur du coefficient de frottement C_{f1} au début du chenal de lave (en M_1) si la profondeur est d_1 . On gardera deux chiffres significatifs pour ce résultat. Donnée : $d_1 = 3,0$ m.
- e) Calculer la valeur du nombre de Reynolds en M_1 et indiquer si l'hypothèse d'un écoulement turbulent est vérifiée. On prendra comme longueur caractéristique le quadruple de la profondeur. Le facteur 4 permet de différencier les régimes d'écoulement laminaire et turbulent avec les mêmes ordres de grandeur que pour un écoulement dans une conduite cylindrique lorsque la longueur caractéristique est prise égale au diamètre du cylindre.
- f) On suppose que le chenal de lave garde une largeur constante et qu'il n'y a ni confluent ni bifurcation. En utilisant la conservation du débit volumique dans le chenal, calculer numériquement, à l'aide du **Document 4** et du **Document 6**, les valeurs C_{f2} , C_{f3} et C_{f4} du coefficient de frottement aux points M_2 , M_3 et M_4 respectivement, ainsi que les profondeurs de lave d_2 , d_3 et d_4 correspondantes.
- g) Indiquer comment varie le nombre de Reynolds le long du chenal avec les hypothèses précédentes et une viscosité constante. En hydraulique, on constate habituellement que le coefficient de frottement n'augmente que si le nombre de Reynolds diminue. Indiquer si les valeurs de C_f calculées précédemment sont en accord avec cette dépendance et les hypothèses. Si on suppose que la température de la lave s'est refroidie de 15 K entre la bouche éruptive et le point M_4 , calculer la valeur de la viscosité dynamique en M_4 à l'aide du **Document 3** et du **Document 5** et en déduire la nouvelle valeur du nombre de Reynolds en M_4 . Indiquer si l'hypothèse d'un refroidissement progressif de la lave est cohérente avec les valeurs calculées du coefficient de frottement.

2.3) Étude du refroidissement de la lave

Le refroidissement de la lave au cours de son écoulement est essentiellement dû aux pertes thermiques radiatives par la surface libre de la lave. On se place dans le cas d'un écoulement stationnaire, bidimensionnel et uniforme d'un liquide incompressible et indilatable. La vitesse, la profondeur, la pression moyenne et la largeur du chenal sont constantes le long de l'écoulement.

On se place dans le cadre d'un modèle dans lequel une croûte solide est présente à la surface de la lave liquide. Dans ce modèle, les pertes thermiques ne dépendent que de la température T_e de cette croûte, beaucoup moins chaude que le liquide incandescent et supposée constante. En-dessous de cette croûte, la température du liquide $T(x)$ est supposée uniforme sur la profondeur mais peut varier avec x .

- a) On considère un volume de contrôle infinitésimal compris entre l'abscisse x et l'abscisse $x + dx$. La puissance thermique radiative à travers l'élément de surface libre du volume de contrôle s'écrit

$$dP_{\text{th}} = -\sigma T_e^4 \ell dx$$

où ℓ est la largeur du chenal, T_e la température de la croûte en K et σ une constante appelée constante de Stefan. En formulant le premier principe de la thermodynamique pour le volume de

contrôle, établir une équation différentielle du premier ordre pour la température de la lave faisant intervenir σ , T_e , ℓ , la capacité thermique massique c , la masse volumique ρ et le débit volumique D_V .

Données : $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$; $\ell = 5 \text{ m}$; $D_V = 1,0 \cdot 10^2 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$; $T_e = 150^\circ\text{C}$.

La température T_e de la croûte a été mesurée sur des coulées de lave contemporaines.

- b) Intégrer cette équation différentielle entre la bouche éruptive à l'origine des abscisses où la température est T_0 (voir la **question 2.1a**) et une abscisse x où la température est T . Calculer, dans ces conditions la température T_{mer} de la lave lorsque celle-ci arrive au bord de la mer. Expliquer pourquoi, dans un tube de lave où la croûte forme un toit, la lave peut s'écouler sur de longues distances. Donnée : $T_e = 150^\circ\text{C}$.

Partie 3 : Approche critique et prospective sur le thème

- 3.1) Si on reprend l'étude du refroidissement de la lave (**partie 2.3**) dans un modèle où il n'y a pas de croûte solide, les pertes thermiques radiatives dépendent de la température $T(x)$ de la lave : $dP_{th} = -\sigma T(x)^4 \ell dx$. Dans ce modèle, la température de la lave en arrivant au bord de la mer serait égale à 969°C . Indiquer si cette valeur semble en accord avec les données présentées dans les documents sur la coulée de lave Kaupulehu. Sans effectuer de calcul, proposer une modélisation qui pourrait permettre d'obtenir un refroidissement de la lave de l'ordre de 20°C lorsqu'elle arrive à la mer.
- 3.2) Critiquer les modèles de refroidissement de la lave utilisés précédemment en indiquant des phénomènes n'ayant pas été pris en compte et qui pourraient jouer un rôle important.

Annexe : Lexique

Anorthite : Minéral constituant le pôle calcique de la série des plagioclases, de formule $\text{CaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8$.

Basalte : Roche volcanique de couleur sombre formée par le refroidissement rapide d'une lave basaltique. Les plagioclases, les pyroxènes et les olivines en sont les minéraux principaux. Les laves basaltiques sont relativement fluides et peu visqueuses. Les basaltes alcalins à olivine sont un type particulier de basalte.

Diopside : minéral de la famille des pyroxènes, de formule $\text{CaMg}(\text{SiO}_3)_2$.

Laves 'a'a ou aa : Type d'écoulement de lave caractérisé par la présence en surface de nombreux blocs solides de forme irrégulière et acérée, appelés clinkers ou gratons, qui se forment par fragmentation de la croûte issue du refroidissement en surface de la lave fluide. Il peut arriver que ces blocs solides soient entraînés au sein du fluide incandescent dans lequel ils fondent. Il existe donc des échanges de masse dans les deux sens entre la phase liquide et les blocs solides. Les laves aa sont souvent très épaisses (plusieurs mètres d'épaisseur).

Olivines : famille de minéraux silicatés comprenant notamment la forstérite Mg_2SiO_4 .

Plagioclases : Minéraux silicatés de la famille des feldspaths. Ils forment une série allant d'un pôle sodique, l'albite $\text{NaAlSi}_3\text{O}_8$, à un pôle calcique, l'anorthite $\text{CaAl}_2\text{Si}_2\text{O}_8$.

Pyroclastes : fragments de lave solides éjectés pendant une éruption volcanique. Les fragments peuvent être de tailles très diverses et comprennent la cendre volcanique ou encore les bombes volcaniques.

Pyroxènes : famille de minéraux silicatés comprenant notamment le diopside $\text{CaMg}(\text{SiO}_3)_2$.

FIN