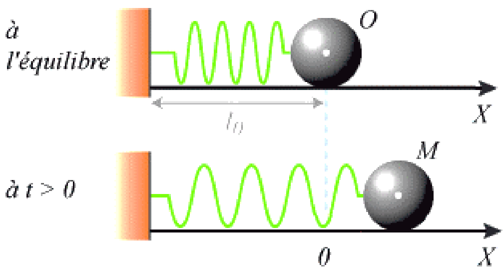
Oscillateurs mécaniques
(Oscillations libres et amorties)

1 – Oscillations libres d'un oscillateur harmonique (= sans amortissement) horizontal

1.1. Equation du mouvement par application du PFD



- **Système étudié :** Masse m
- **Référentiel d'étude :** Référentiel terrestre, supposé galiléen pendant la durée de l'étude
- **Base de projection :** cartésienne (voir définition de x)

- **Bilan des forces extérieures appliquées au système :**

- **Ecriture du principe fondamental de la dynamique :**

- **Projection sur l'axe des x :**

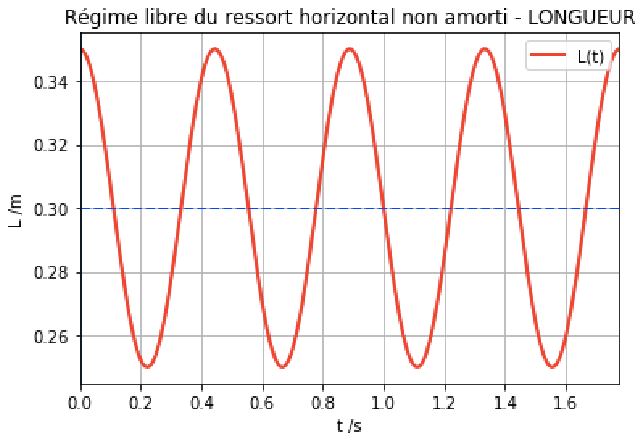
- **Forme des solutions :**

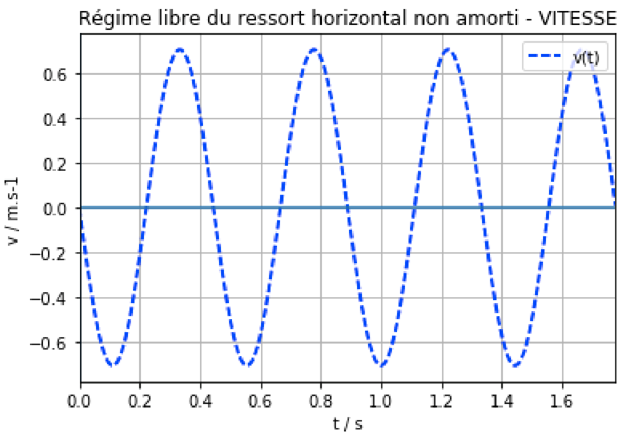
- **Détermination des constantes d'intégration avec les conditions initiales :**

  On suppose ici que la masse est initialement lâchée d'une distance x_0 de la longueur à vide, sans vitesse initiale.

- **Période d'oscillation / Pulsation propre :**

- **Tracés :**



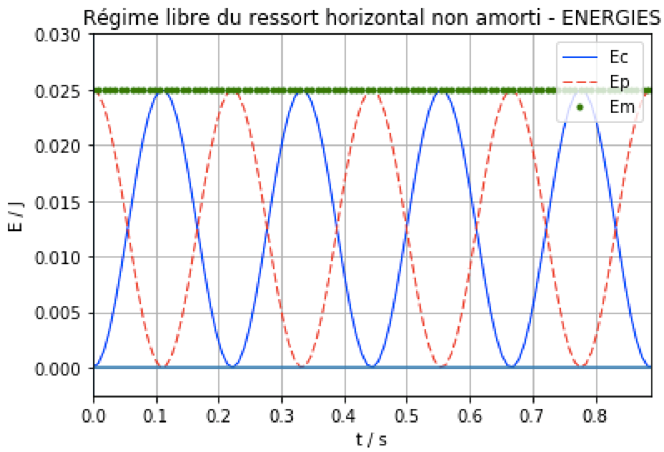


- **Expressions des énergies :**

Energie potentielle élastique :

Energie cinétique :

Energie mécanique :

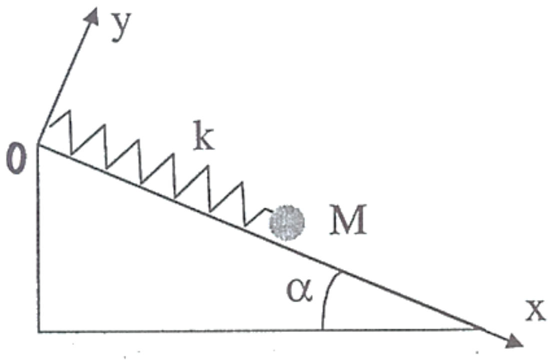


1.2.Equation du mouvement par approche énergétique

- **Caractère conservatif :**
Le système est uniquement soumis à des forces conservatives (force de rappel du ressort) et à des forces ne travaillant pas (poids et réaction normale du support). Le théorème de l'énergie mécanique $\Delta E_m = W(\overrightarrow{F_{non\ cons}})$ permet d'affirmer que l'énergie mécanique reste constante au cours du temps.

- **Equation du mouvement :**

2 – Oscillations libres d'un oscillateur harmonique incliné



- **Système étudié :** Masse m
- **Référentiel d'étude :** Référentiel terrestre, supposé galiléen pendant la durée de l'étude
- **Base de projection :** cartésienne (voir définition de x)

- **Bilan des forces extérieures appliquées au système :**
    - Poids $\vec{P}$
    - Force de rappel du ressort $\vec{F}$
    - Réaction du support, normale au support en l'absence de frottements $\vec{R}$

- **Ecriture du principe fondamental de la dynamique :** $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{R}$

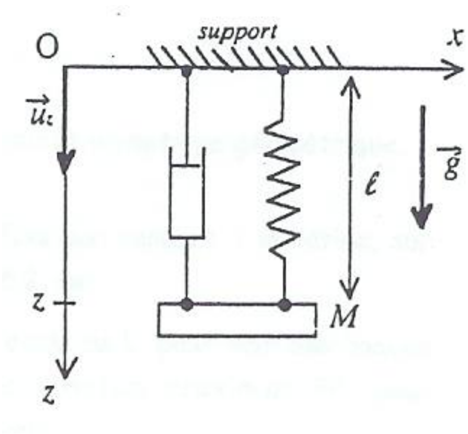
- **Projection sur l'axe du mouvement :** $m\vec{a}.\overrightarrow{e_x} = \vec{P}.\overrightarrow{e_x} + \vec{F}.\overrightarrow{e_x} + \vec{R}.\overrightarrow{e_x}$

- **Longueur du ressort à l'équilibre :**

- **Discussion du type de mouvement :**

3 – Oscillateur amorti

3.1. Equation du mouvement



- **Système étudié :** Masse M
- **Référentiel d'étude :** Référentiel terrestre, supposé galiléen pendant la durée de l'étude
- **Base de projection :** cartésienne (voir définition de z)
- **Bilan des forces extérieures appliquées au système :**
  - Poids $\vec{P}$
  - Force de rappel du ressort $\vec{F}$
  - Force de frottements fluides, de norme supposée proportionnelle à la vitesse : $\vec{f} = h.\vec{v}$
- **Application du PFD et projection sur l'axe du mouvement :**

- **Longueur du ressort à l'équilibre :**

- **Forme canonique de l'équation différentielle**

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dz}{dt} + \omega_0^2\, z = \omega_0^2 z_{eq}$$

- **Résolution de l'équation différentielle :**

  - **Solution particulière :** cherchée sous la forme d'une constante car le second membre est constant !

$$z_p = cte \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{d^2z_p}{dt^2}}_{=0} + \frac{\omega_0}{Q}\underbrace{\frac{dz_p}{dt}}_{=0} + \omega_0^2\, z_p = \omega_0^2 z_{eq} \quad \Rightarrow \quad z_p = z_{eq}$$

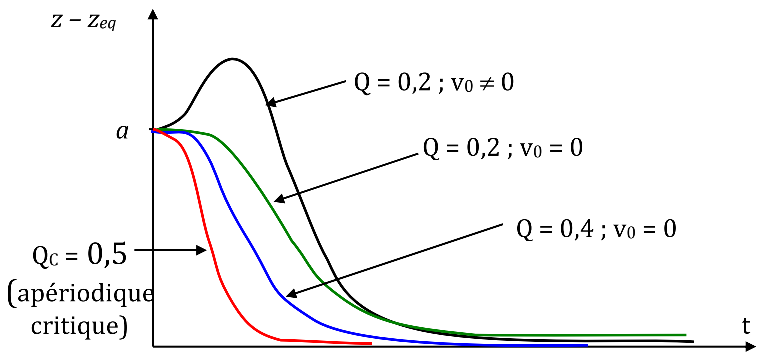
  - **Solution de l'équation homogène :** La forme de la solution générale de l'équation différentielle du mouvement dépend de la valeur du discriminant Δ de l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$$

- **1er cas : $\Delta > 0 \;\Leftrightarrow\; Q < \frac{1}{2}$ – Régime apériodique**
  - Deux racines réelles négatives : $r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$
  - Solution générale : $z_h(t) = A.\mathrm{e}^{(r_+.t)} + B.\mathrm{e}^{(r_-.t)}$
  - Retour à la position d'équilibre (Z = 0) sans oscillations, et ce d'autant plus rapidement que le facteur de qualité Q est faible. En fonction des conditions initiales (allongement initial par rapport à la position d'équilibre, vitesse initiale), la fonction Z(t) peut présenter un extremum.

- **2nd cas : $\Delta = 0 \;\Leftrightarrow\; Q = \frac{1}{2}$ – Régime critique**
  - Une racine réelle double : $r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$
  - Solution générale : $z_h(t) = (A + B.t).\mathrm{e}^{-\omega_0.t}$
  - Retour rapide à l'équilibre sans oscillations (régime transitoire de durée la plus brève)



- **3ème cas : $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$ – Régime pseudo-périodique**

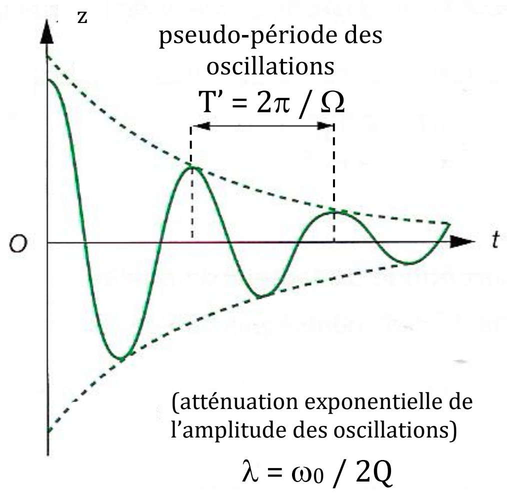
  - Deux racines complexes conjuguées : $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} = -\lambda \pm j\Omega$
  - Solution générale : $z_h(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}(A.\cos(\Omega t) + B.\sin(\Omega t))$ ou $z_h(t) = z_m \mathrm{e}^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \phi)$
  - Retour rapide à l'équilibre sans oscillations (régime transitoire de durée la plus brève)
  - $z_h(t)$ est une fonction oscillante de pseudo-période T' modulée par une exponentielle décroissante :

    - La pseudo-période T' est liée à la **partie imaginaire** des racines complexes, **Ω**, qui est la **pseudo-pulsation** des oscillations :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \xrightarrow[si\ Q \gg \frac{1}{2}]{} T \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = T_{propre}$$

    - L'**atténuation de l'amplitude des oscillations** est liée à la **partie réelle** des racines complexes. Plus le facteur de qualité Q est grand, moins l'atténuation est forte, et donc le nombre d'oscillations perceptibles important.

$$Enveloppe\ 1 :\ z_m \mathrm{e}^{-\lambda t} = z_m \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$
$$Enveloppe\ 2 :\ -z_m \mathrm{e}^{-\lambda t} = -z_m \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$



Dans les trois types de relaxation, le terme $\tau = 2Q/\omega_0$, homogène à un temps, indique la durée caractéristique du régime transitoire. On peut considérer ce régime terminé au bout de 5τ.

3.2. Aspect énergétique

- **Nature des forces en présence :**
  - Forces conservatives : poids et force de rappel du ressort
  - Force dissipative : frottements fluides

$$\delta W(\vec{f}) = \vec{f}.d\vec{l} = -h\vec{v}.\vec{v}dt = -hv^2dt$$

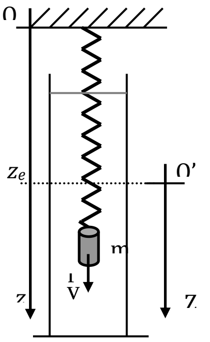
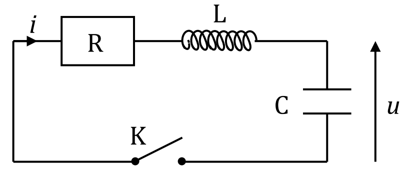
Travail dépendant du chemin suivi (notamment des vitesses intermédiaires) : force non conservative
Travail résistant (h et v^2 positifs) : $\delta W(\vec{f}) < 0$

- **Théorème de l'énergie mécanique :**

$$dE_m = \delta W(\vec{f}) < 0$$

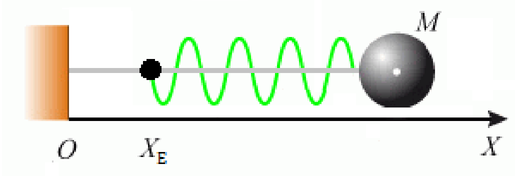
L'énergie mécanique diminue au cours du temps.

3.3. Analogie électro-mécanique

MÉCANIQUE	ÉLECTROCINÉTIQUE
 t = 0 : masse écartée de sa position d'équilibre et relâchée sans vitesse initiale Position : Z Vitesse : $\frac{dZ}{dt}$ • <u>Variable :</u> allongement Z du ressort par rapport à sa position d'équilibre • Equation du mouvement (établie en appliquant la 2de loi de Newton) $\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dZ}{dt} + \frac{k}{m}Z = 0$	t < 0 : condensateur C chargé (Q_0) t = 0 : fermeture de K  Charge du condensateur q = Cu Intensité $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$ • <u>Variable :</u> tension u aux bornes du condensateur (ou charge q = Cu) • Equation vérifiée par u (établie en utilisant la loi des mailles et les relations intensité/tension aux bornes de L et C) $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$
• Pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ • Facteur de qualité : $Q = \frac{m\omega_0}{h} = \frac{1}{h}\sqrt{km}$	• Pulsation propre : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ • Facteur de qualité : $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
Allongement Z	Charge q = Cu
Vitesse $\frac{dZ}{dt}$	Intensité $\frac{dq}{dt}$
Masse m ⇒ s'oppose aux variations de vitesse (inertie)	Inductance L ⇒ s'oppose aux variations d'intensité
Raideur du ressort k	Inverse de la capacité (1/C)
Facteur de frottement fluide h ⇒ Amortissement du système par dissipation d'énergie mécanique	Résistance R ⇒ Amortissement du système par dissipation d'énergie électromagnétique
Energie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$	Energie magnétique dans la bobine $E_{mag} = \frac{1}{2}Li^2$
Energie potentielle $E_p = \frac{1}{2}kZ^2$	Energie électrique le condensateur $E_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

4 – Complément : oscillations en régime sinusoïdal forcé d'un oscillateur mécanique

Pour obtenir un régime sinusoïdal forcé, une extrémité « E » du ressort est attachée à un système générant des oscillations sinusoïdales de telle sorte que $X_E(t) = a.cos(\omega t)$, l'autre extrémité étant attachée à la masse m.
L'origine de l'axe Ox est choisie au niveau du support en O.



Système étudié : masse m
Référentiel terrestre supposé galiléen pendant la durée de l'étude.
Forces extérieures appliquées au système :

- Poids $\vec{P}$
- Force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{e_x} = -k[(x - X_E) - \ell_0]\,\overrightarrow{e_x}$
- Force de frottements fluides $\vec{f} = -h\vec{v} = -h\dot{x}\overrightarrow{e_x}$
- Réaction du support, normale au support en l'absence de frottements $\vec{R}$

Principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{f} + \vec{R}$

Projection sur l'axe du mouvement :

$$m\vec{a}.\overrightarrow{e_x} = \vec{P}.\overrightarrow{e_x} + \vec{F}.\overrightarrow{e_x} + \vec{f}.\overrightarrow{e_x} + \vec{R}.\overrightarrow{e_x}$$
$$m\ddot{x}\,\overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_x} = 0 - k[(x - X_E) - \ell_0]\,\overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_x} - h\dot{x}\,\overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_x} + 0$$
$$m\ddot{x} = -k[(x - a.\cos(\omega t)) - \ell_0] - h\dot{x}$$

Introduction d'une variable simplificatrice :

$$\boldsymbol{X = x - l_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{X} = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{X} = \ddot{x}}$$
$$\ddot{X} + \frac{h}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = \frac{k}{m}a.\cos(\omega t)$$

Forme canonique de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dX}{dt} + \omega_0^2\,X = \omega_0^2 a.\cos(\omega t)$$

<u>Résolution :</u> $X(t) = X_h(t) + X_p(t)$

- **Solution de l'équation homogène sans second membre** (voir paragraphe précédent) : ce terme tend assez rapidement vers 0 (au bout de 5τ). On considère donc que très rapidement, $X(t) \approx X_p(t)$
- **Solution particulière :** ATTENTION, RECHERCHEE AU MÊME FORMAT QUE LE SECOND MEMBRE !!
  Le second membre de l'équation différentielle étant ici sinusoïdal, il est commode d'introduire la notation complexe :

$$X_p(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi) \xrightarrow[\substack{notation\\complexe}]{} \underline{X} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$X_E(t) = a\cos(\omega t) \xrightarrow[\substack{notation\\complexe}]{} \underline{X_E} = a e^{j\omega t}$$

Son injection dans l'équation différentielle donne :

$$\frac{d^2\underline{X}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\underline{X}}{dt} + \omega_0^2\,\underline{X} = \omega_0^2\,\underline{X_E}$$

$$(j\omega)^2\underline{X} + \frac{\omega_0}{Q}(j\omega)\underline{X} + \omega_0^2\,\underline{X} = \omega_0^2\,\underline{X_E}$$

$$-\omega^2\underline{X} + j\omega\frac{\omega_0}{Q}\underline{X} + \omega_0^2\,\underline{X} = \omega_0^2\,\underline{X_E}$$

$$\boxed{\underline{X} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}}\,\underline{X_E}}$$

Obtention de la forme finale de la solution :

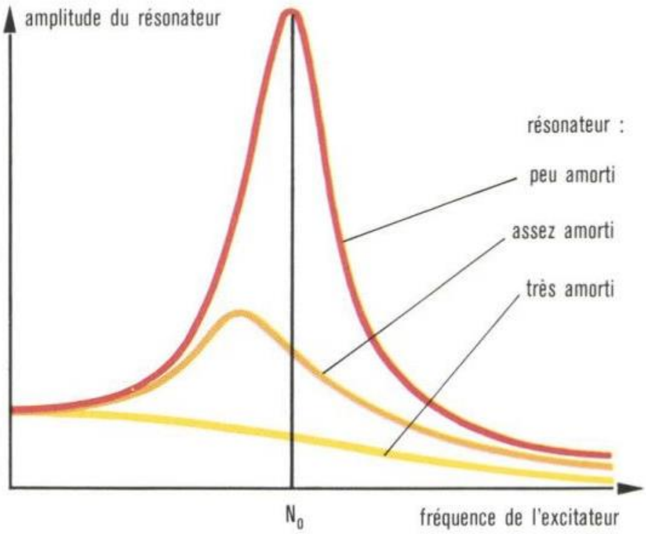
- **Passage au module :** obtention de l'amplitude des oscillations :

$$X_m = |\underline{X}| = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2}}\,|\underline{X_E}|$$

$$\boxed{X_m(\omega) = \frac{a.\,\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2}}}$$

L'amplitude des oscillations dépend de la fréquence de forçage ($\omega = 2\pi f \rightarrow f = \omega/2\pi$).

L'étude menée en électricité a montré que celle-ci passe par un maximum pour une fréquence excitatrice f donnée à condition que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$: il y a alors résonance d'amplitude.



- **Passage à l'argument :** obtention du déphasage φ de X par rapport à X_E :

$$\arg(\underline{X}) = \arg\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}}\right) + \arg\left(\underline{X_E}\right)$$

$$\omega t + \varphi = \arg(\omega_0^2) - \arg\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}\right) + \omega t$$

$$\boxed{\varphi(\omega) = -\arg\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}\right)}$$

Les deux fonctions X(t) et X_E(t) sont déphasées. La fonction *arctan* doit être utilisée avec précaution car le signe de cos(φ) dépend de ω.

$$\cos(\varphi) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{module}$$

Pour le domaine où $\omega < \omega_0$, $\cos(\varphi) > 0$,

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}\right)$$

Pour le domaine où $\omega > \omega_0$, $\cos(\varphi) < 0$,

$$\varphi(\omega) = -\left(\pi - \arctan\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}\right)\right)$$