Condition d'équilibre d'un solide

Jusqu'à présent, la ***mécanique du point*** a permis de décrire le mouvement du centre de masse d'un objet. Ce chapitre s'intéresse aux conditions d'équilibre du solide dans son ensemble.

La condition d'équilibre du point matériel est insuffisante pour décrire l'équilibre d'un solide. En effet, cette condition implique que le centre de masse est fixe, mais n'implique pas nécessairement l'équilibre des autres points du solide.

Equilibre du point matériel	Equilibre du solide
$Equilibre\ du\ point\ \Rightarrow\ \forall t, \overrightarrow{v_G} = \vec{0}$ $\Rightarrow\ m\dfrac{\overrightarrow{dv_G}}{dt} = \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$	• Centre de masse immobile ⇒ $\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ • Le solide ne tourne pas : autre cond° nécessaire

1 – Centre de masse d'un solide

1.1. Masse d'un système de plusieurs points matériels

- **Système discret de plusieurs points matériels :**

  Un système discret est un ensemble de points matériels $M_1\ (m_1)\ldots M_n\ (m_n)$.
  La masse de ce système est la somme des masses des points :

$$m = \sum_i m_i$$

- **Système continu de points matériels :**

  Dans un système continu, la masse du volume élémentaire de matière dV autour du point M s'écrit $\delta m = \rho(M).dV$.
  La masse totale du système s'obtient par intégration :

$$m = \iiint_{(V)} \rho(M) \cdot dV$$

  Si le matériau est homogène, sa masse volumique est la même en tout point. Alors, $m = \rho.V$

1.2. Centre de masse

Le centre de masse d'un solide correspond au barycentre des points du système, pondérés par leur masse respective.

- **Cas d'un système discret**

  Le centre de masse G d'un système discret vérifie :

$$\sum_i m_i \cdot \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \cdot \overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i}$$

- **Cas d'un système continu**

  Le centre de masse G d'un système continu vérifie :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\iiint_{(V)} \overrightarrow{OM} \cdot \rho(M) \cdot dV}{m}$$

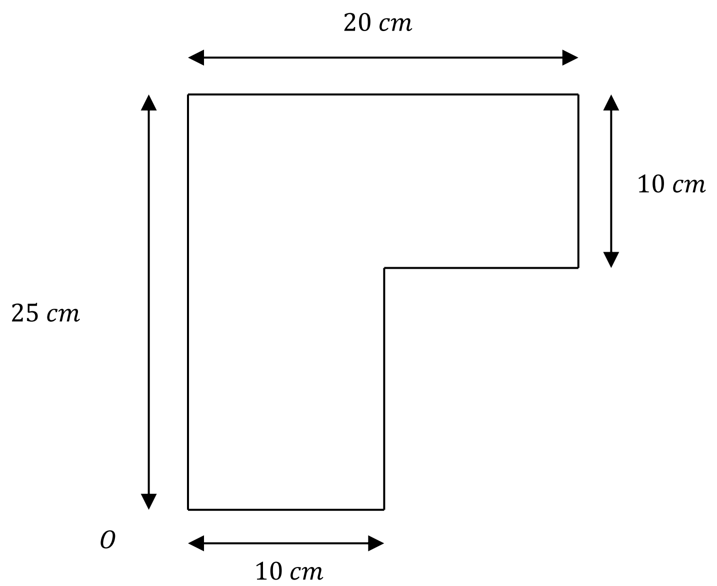
1.3. Propriétés du centre de masse

Si le système étudié présente un **plan de symétrie** dans la répartition de sa masse, le centre de masse **appartient à ce plan de symétrie**.

Exemple : Le centre de masse d'une boule homogène de rayon R est au centre de la boule, puisque tout plan passant par le centre est un plan de symétrie pour la boule.

Pour les systèmes plus complexes, il est possible de décomposer le système matériel continu en sous-systèmes simples. Le centre de masse global est le barycentre des centres de masse des sous-systèmes simples, affectés de leurs masses respectives.

Exemple : Centre de masse d'une équerre homogène d'épaisseur e :



Décomposition de l'équerre en deux rectangles :

- ***Rectangle « de gauche » :***
  - Surface : $S_1 = 250\ cm^2$
  - Masse : $m_1 = \rho.e.S_1$
  - Centre de masse G_1 : $(x_1 = 5\ cm\ ; y_1 = 12{,}5\ cm)$
- ***Rectangle « de droite » :***
  - Surface $S_2 = 100\ cm^2$
  - Masse : $m_2 = \rho.e.S_2$
  - Centre de masse G_2 : $(x_2 = 15\ cm\ ; y_2 = 20\ cm)$

Le centre de masse G est défini par la relation barycentrique :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \cdot \overrightarrow{OG_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OG_2}}{m_1 + m_2}$$

Ses coordonnées sont :

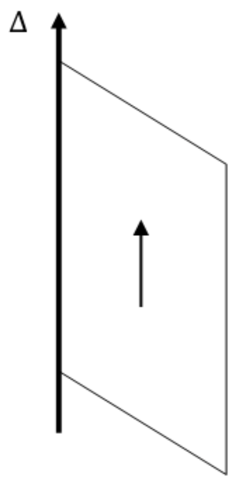
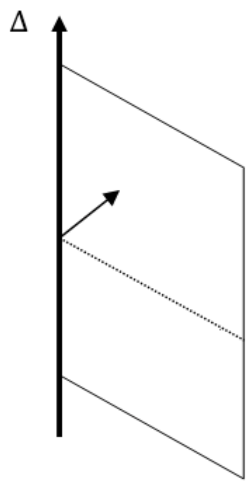
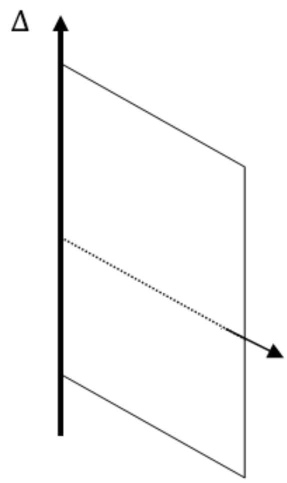
$$x_G = \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2}{S_1 + S_2} = 7{,}9\ cm$$
$$y_G = \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2}{S_1 + S_2} = 14{,}6\ cm$$

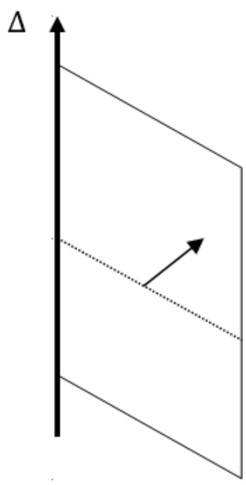
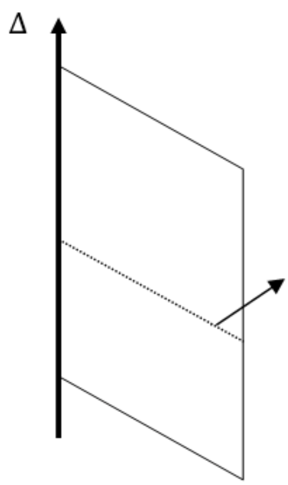
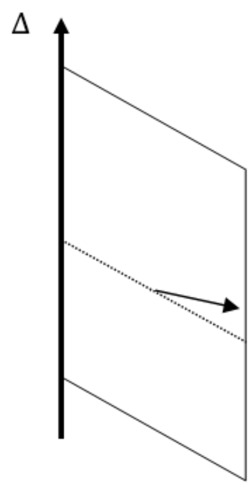
2 – Moment d’une force par rapport à un axe

2.1. Approche qualitative

Le moment d’une force indique la capacité de la force à mettre le solide en rotation autour d’un axe fixe Δ.

Exemple : application d’une force pour la mise en rotation d’une porte autour de l’axe vertical passant par ses gonds.

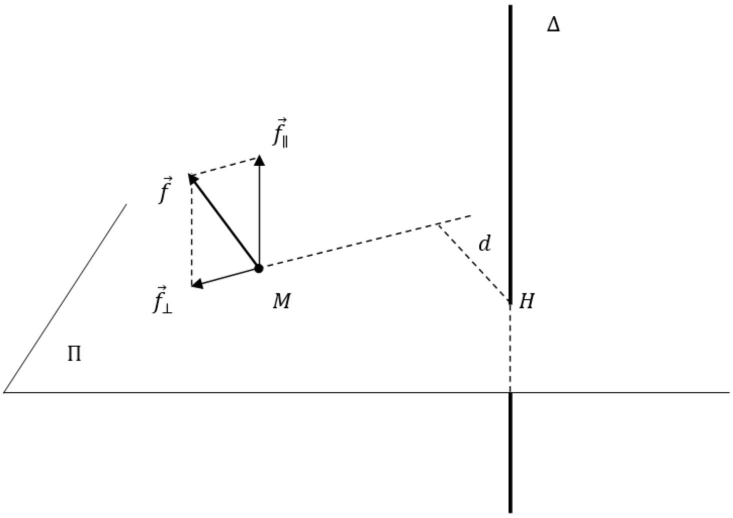
Droite d’action de la force parallèle à l’axe de rotation	***Droite d’action de la force passant par l’axe de rotation***	
		

Droite d’action de la force ni sécante, ni parallèle à l’axe de rotation		
		

2.2. Approche quantitative : bras de levier

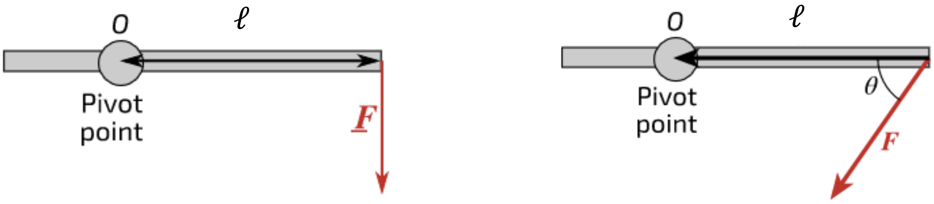
La quantification de l'aptitude d'une force $\vec{f}$ à mettre en rotation un solide autour d'un axe Δ quelconque nécessite la décomposition de la force en deux composantes, $\vec{f}_{\parallel}$ et $\vec{f}_{\perp}$, définies de la manière suivante :

- Une composante parallèle à l'axe Δ, notée $\vec{f}_{\parallel}$ inapte à entraîner la rotation du solide ;
- Une seconde composante, notée $\vec{f}_{\perp}$, obtenue par projection de $\vec{f}$ sur le plan orthogonal à Δ passant par M.



Moment d'une force par rapport à un axe Δ
Le moment de la force $\vec{f}$ par rapport à l'axe Δ se limite à la contribution de la composante $\vec{f}_{\perp}$. Il s'exprime comme le produit de la norme de la composante complémentaire par le **« bras de levier » *d*, distance minimale entre l'axe D et la droite d'action de la force $\vec{f}$**. $$\boxed{\left|\mathcal{M}_{\Delta(\vec{f})}\right| = \left|\mathcal{M}_{\Delta(\vec{f}_{\perp})}\right| = \|\vec{f}_{\perp}\|.d}$$ **Le moment d'une force est une grandeur scalaire, algébrique, additive et homogène à une énergie (N.m ≡ J).** $$\mathcal{M}_{\Delta(\sum_k \vec{f}_k)} = \sum_k \mathcal{M}_{\Delta(\vec{f}_k)}$$ Le signe du moment est choisi arbitrairement pour indiquer le sens de rotation induit par la force (par exemple, positif pour une mise en rotation dans le sens des aiguilles d'une montre).

Exemples :



Intérêt du bras de levier : Démultiplier une action motrice entraînant la rotation d'un objet autour d'un axe

3 – Condition d'équilibre du solide

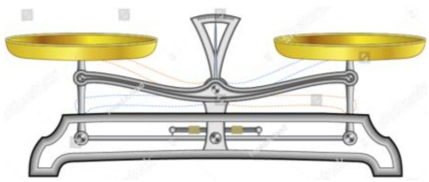
Conditions d'équilibre d'un solide
Pour qu'un solide soit à l'équilibre dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, il est nécessaire que : ○ La **résultante des forces extérieures** exercées sur le solide doit être nulle : $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ ○ Le **moment résultant des forces extérieures** doit être nul par rapport à n'importe quel axe fixe Δ : $\mathcal{M}_{\Delta(\vec{F}_{ext})} = 0$

Aucune de ces conditions n'est suffisante :

- Si $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$, alors $\frac{d\vec{v_G}}{dt} = \vec{0}$: le centre de masse du solide évolue à vitesse constante. Le système n'est donc à l'équilibre que si sa vitesse initiale est nulle.
- Un solide initialement mis en rotation autour d'un axe et abandonné sans aucune force peut vérifier $\mathcal{M}_{\Delta(\vec{F}_{ext})} = 0$ sans être à l'équilibre. Il faut ici aussi que sa vitesse initiale de rotation soit nulle.

Exemple :

- ***Balance de Roberval :*** *Condition d'équilibre ?*

« Photo »	Schéma
	

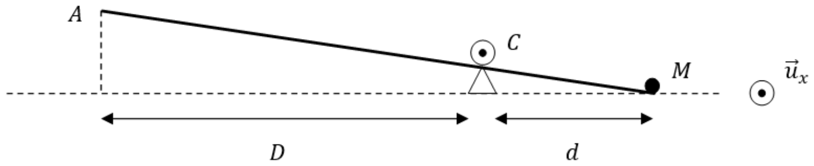
Système étudié : Bras horizontal de la balance

Bilan des forces extérieures :

- Poids du bras :
- Réaction du support :
- Poids de la masse placée à gauche :
- Poids de la masse placée à droite :

Condition d'équilibre :

- ***Catapulte de cirque :***

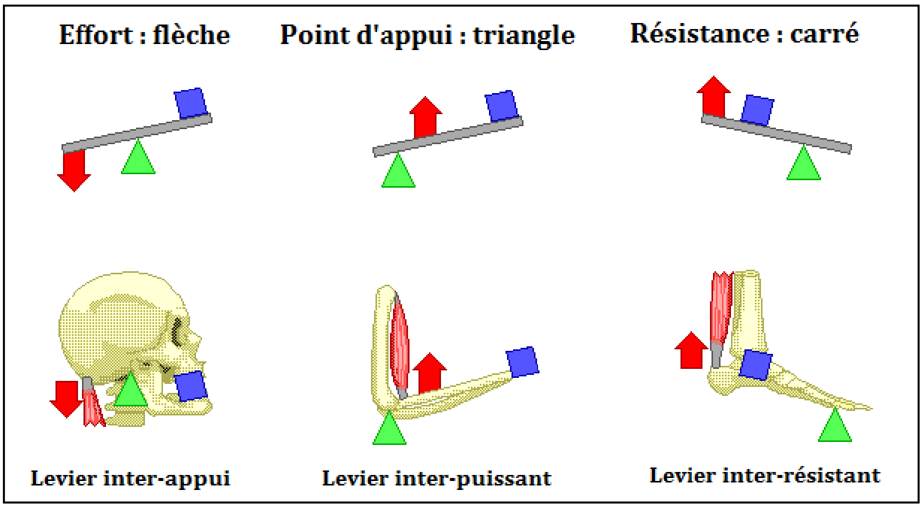


<u>*Condition pour propulser ?*</u>

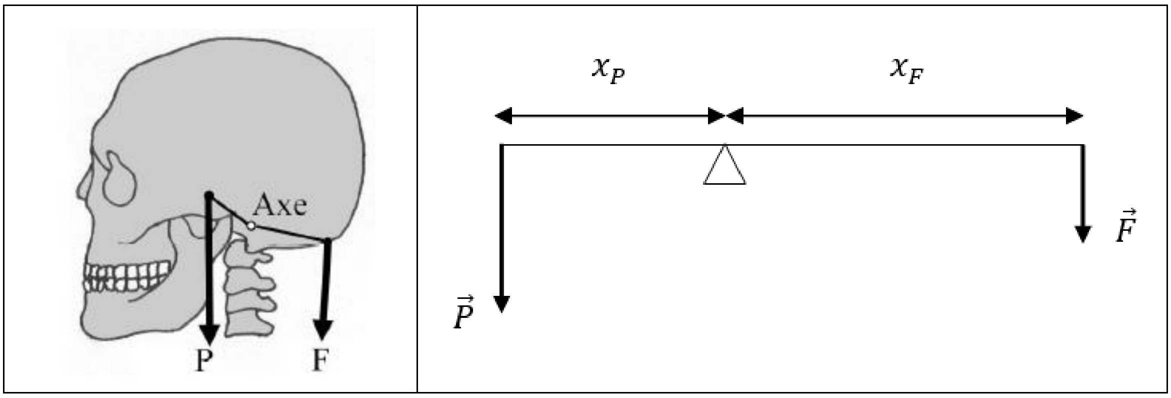
4 – Illustrations en biomécanique

Les actions mécaniques impliquant des rotations sont nombreuses dans le corps humain. Elles mettent en jeu des systèmes à bras de levier articulés autour de pivots (rotule, coude, ...), soumis à des forces diverses (poids des segments osseux, forces exercées par les muscles, ...).

On dénombre trois types de situations résumées dans le schéma suivant :

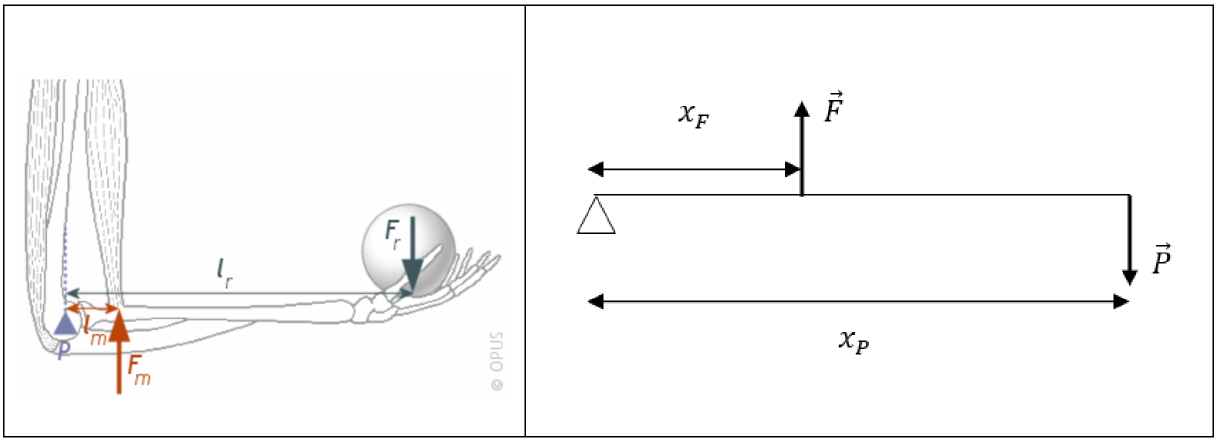


- **Exemple de levier inter-appui :** *l'articulation du cou (ou de la cheville)*



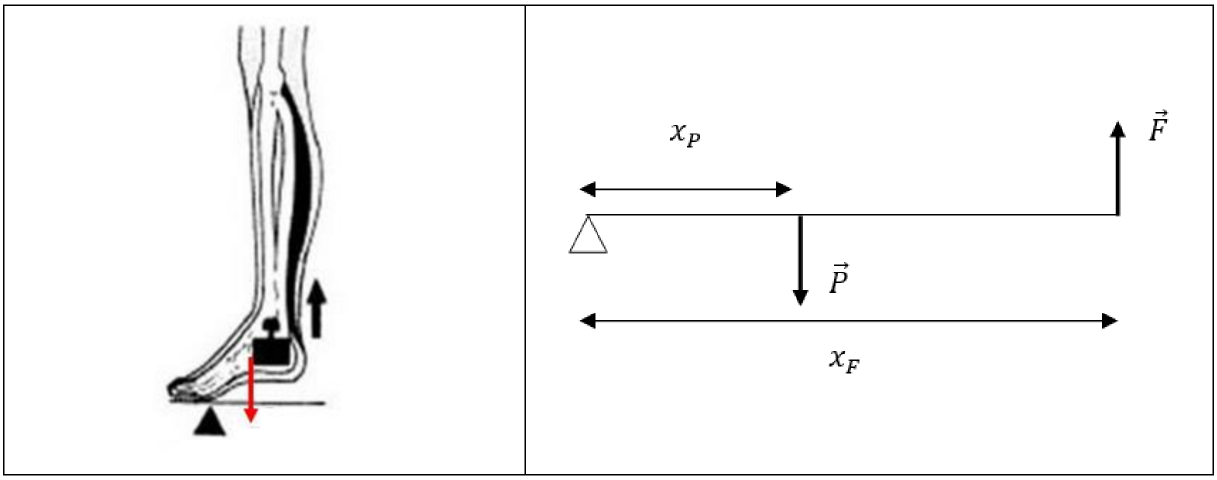
L'insertion des muscles extenseurs du rachis cervical à l'arrière du crâne engendre un bras de levier important qui minimise la force à exercer pour maintenir le cou en équilibre.

- **Exemple de levier inter-puissant :** *l'articulation du coude (principe de la canne à pêche)*



L'insertion du biceps est associée à un faible bras de levier qui nécessite une action motrice du biceps importante pour contrer le poids de l'avant-bras et d'un éventuel objet porté dans la main.

- **Exemple de levier inter-résistant :** *mis en jeu quand on se met sur la pointe des pieds (principe de la brouette)*



Les muscles du mollet mis en jeu pour lever la cheville bénéficient d'un bras de levier important qui minimise l'effort mécanique à produire pour contre-balancer le poids de l'ensemble du corps associé à un bras de levier plus faible.