Rappels de 1BCPST
(Cinématique, Dynamique, Energie)

Mécanique = science des mouvements de systèmes matériels. Elle se divise en deux branches :
- ***Cinématique*** : étude purement descriptive des mouvements, indépendamment des causes ;
- ***Dynamique*** : relie l'étude des mouvements à leurs causes, c'est à dire aux forces qui les engendrent.

1 – Cinématique du point matériel

1.1. Définitions

- **Référentiel :**

Référentiel = solide associé à un **repère d'espace** (base orthonormée) **et** à un **repère de temps** (horloge. Dans un référentiel donné, un événement est repéré par 4 coordonnées : 3 coordonnées d'espace et le temps t.

- *Référentiel terrestre :* centré en un point de la Terre et dont les axes sont liés à la rotation terrestre. Un observateur « immobile » est donc fixe dans le référentiel terrestre. Utile pour les études de mouvements à la surface de la Terre.
- *Référentiel géocentrique* (utile pour l'étude du mouvement des satellites terrestres) : centré sur le centre de masse de la Terre et dont les axes sont définis par rapport à 3 étoiles « fixes » (suffisamment lointaines pour paraître immobiles). Le référentiel géocentrique n'est pas solidaire de la Terre dans son mouvement de rotation autour des pôles.
- *Référentiel de Copernic* : centré sur le centre de masse du système solaire et dont les axes sont dirigés vers 3 étoiles éloignées « fixes ».

- **Vecteurs position, vitesse et accélération**

Soit un point matériel M dans un référentiel (R) muni d'une base orthonormée d'origine O. Le mouvement du point M est décrit par un ensemble de vecteurs. Tout vecteur est caractérisé par sa direction, son sens et sa norme.

- vecteur position : $\overrightarrow{OM}$
- vitesse instantanée : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ Norme (SI) exprimée en m.s^{-1}
- accélération : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$ Norme (SI) exprimée en m.s^{-2}

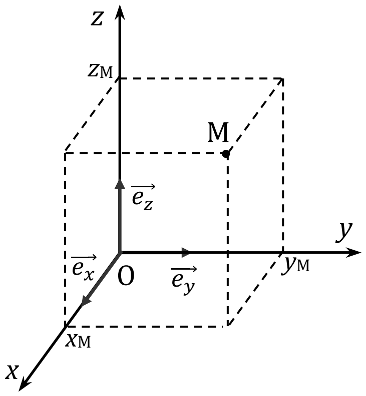
On appelle équation différentielle du mouvement la relation entre le temps, le vecteur position et ses dérivés (vitesse et/ou accélération). La résolution de cette équation différentielle permet d'accéder à l'équation de la trajectoire (position au cours du temps).

- **Trajectoire**

La trajectoire correspond à l'ensemble des positions occupées par le point M. Elle dépend du référentiel choisi. L'équation de la trajectoire se déduit des équations paramétriques ou équations horaires (par exemple x(t) et y(t) pour un mouvement plan décrit en coordonnées cartésiennes) par élimination du paramètre temps t.

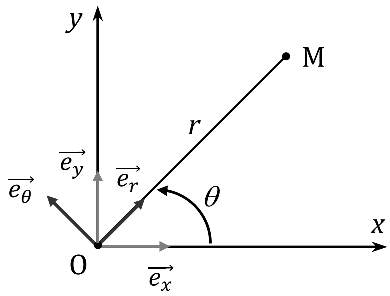
1.2. Systèmes de coordonnées

- **Coordonnées cartésiennes (*x*, *y*, *z*)**



- **Repère** $(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$:
  Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ *et* $\overrightarrow{e_z}$ ne dépendent ni du point M considéré, ni du temps. Ils restent fixes dans le référentiel (*R*) au cours du mouvement.
- **Vecteur position :** $\overrightarrow{OM} = x_M.\overrightarrow{e_x} + y_M.\overrightarrow{e_y} + z_M.\overrightarrow{e_z}$
- **Vecteur vitesse :** $\vec{v} = \dot{x}.\overrightarrow{e_x} + \dot{y}.\overrightarrow{e_y} + \dot{z}.\overrightarrow{e_z}$
- **Vecteur accélération :** $\vec{a} = \ddot{x}.\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}.\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}.\overrightarrow{e_z}$
- **Comment positionner les vecteurs ?**
  - $\overrightarrow{e_x}$: si mouvement rectiligne, positionner $\overrightarrow{e_x}$ dans la direction du mouvement.
  - Les autres vecteurs sont obtenus par rotation de $\frac{\pi}{2}$ pour avoir un repère orthonormé.

- **Coordonnées polaires (*r*, *θ*) (coordonnées plan)**



- **Repère** $(O,\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta})$:
  Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_r}$ *et* $\overrightarrow{e_\theta}$ dépendent du point M, et par conséquent, du temps. Ils changent au cours du mouvement.
- **Vecteur position :** $\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{e_r}$
- **Vecteur vitesse :** $\vec{v} = \dot{r}.\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}.\overrightarrow{e_\theta}$
- **Vecteur accélération :** $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2).\overrightarrow{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}).\overrightarrow{e_y}$
- **Comment positionner les vecteurs ?**
  - $\overrightarrow{e_r}$: vecteur unitaire orienté du centre de rotation vers M
  - $\overrightarrow{e_\theta}$: vecteur obtenu par rotation de $\theta = \frac{\pi}{2}$ du vecteur $\overrightarrow{e_r}$.

- **Comment retrouver les expressions des vecteurs vitesse et accélération en coordonnées polaires ?**

Les vecteurs $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ se déplacent au cours du mouvement. On peut montrer que dériver par rapport au temps ces deux vecteurs revient à les tourner d'un angle $\frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}} \qquad \boxed{\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_r}}$$

2.3. Lois de composition des vitesses (référentiels en translation)

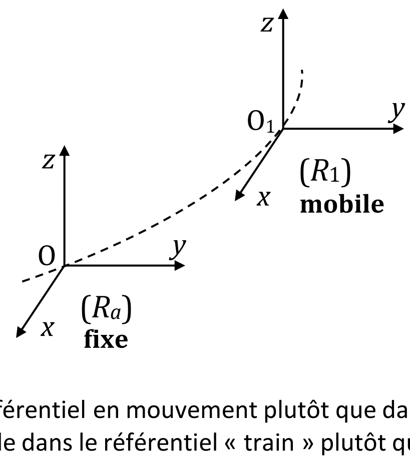
Soit un référentiel fixe (R_a) appelé référentiel absolu et un référentiel (R_1), appelé référentiel relatif, en mouvement de translation (rectiligne, circulaire ou curviligne quelconque) par rapport à (R_a).

Le mouvement du référentiel relatif (R_1) par rapport au référentiel (R_a) est caractérisé par la vitesse du point O_1 (point fixe dans le référentiel mobile R_1) dans le référentiel (R_a), appelée vitesse d'entraînement :

$$\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v(O_1)_{R_a}} \neq \vec{0}$$

La vitesse du point M par rapport au référentiel absolu s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{v(M)_{R_a}} = \overrightarrow{v(M)_{R_1}} + \overrightarrow{v_e}}$$



Cette relation s'avère utile lorsque l'étude du mouvement de M est plus aisée dans un référentiel en mouvement plutôt que dans le référentiel absolu. Par exemple, l'étude d'un pendule simple dans un train est plus facile dans le référentiel « train » plutôt que dans le référentiel terrestre.

2 – Forces

Une force modélise une action mécanique capable de déformer un corps ou de provoquer ou modifier son mouvement. La force est associée à un vecteur force $\vec{F}$ caractérisé par :

- un point d'application (point M) ;
- une direction ;
- un sens ;
- une norme $\|\vec{F}\|$, exprimée en Newton (N ≡ kg.m.s^{-2}), qui représente l'intensité de l'action mécanique exercée.

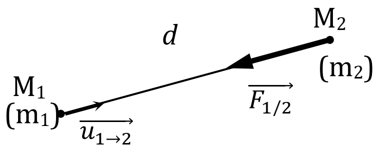
On distingue :

- Les forces **à distance** : interaction gravitationnelle, interactions électromagnétiques, interactions nucléaires…
- Les forces **de contact** : tension d'un ressort ou d'un fil, réaction d'un support, force de frottement (solide ou fluide), forces pressantes exercées par un fluide…

<u>Quelques exemples :</u>

- **Force gravitationnelle**

  La force gravitationnelle exercée par une masse ponctuelle m_1 sur la masse ponctuelle m_2, distante de $d = M_1M_2$ est :



$$\boxed{\overrightarrow{F_{1/2}} = -G\,\frac{m_1.m_2}{d^2}\,\overrightarrow{u_{1\to2}}}$$

  où G = 6,672.10^{-11} N.m^{-2}.kg^{-2} est la constante de gravitation universelle.

- **Poids**

  Le poids d'un corps est en première approximation la force d'attraction exercée par la Terre sur le corps à condition que celui-ci reste proche du sol de la Terre pendant son mouvement. Cette force est verticale et orientée vers le bas. Sa norme est $P = mg$, où la constante g est appelée accélération de la pesanteur (g = 9,8 m.s^{-2}).

- **Force électrostatique de Coulomb**

  La force électrostatique exercée par une charge ponctuelle q_1 sur la charge ponctuelle q_2, dans le vide, s'exprime par :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1.q_2}{d^2}\,\overrightarrow{u_{1\to2}}}$$

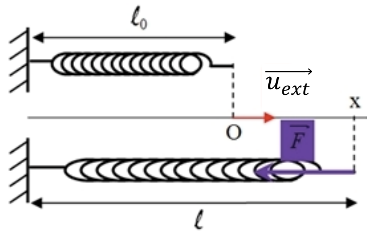
  où ε_0 = 8,854.10^{-12} S.I. est la permittivité du vide.

  ⇒ Force répulsive si q_1 et q_2 de mêmes signes ;

  ⇒ Force attractive si q_1 et q_2 de signes opposés.

- **Tension d'un ressort**

  La force de rappel exercée par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, s'écrit :



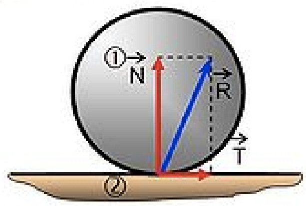
$$\boxed{\vec{T} = -k(\ell - \ell_0).\overrightarrow{u_{ext}}}$$

  où le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_{ext}}$ est dirigé des spires vers le point d'application de la force.

- **Réaction d'un support**

  Le contact d'un objet avec un support solide engendre l'existence d'une force exercée par le solide sur l'objet appelée réaction du support. Cette force présente deux composantes :

  - Une composante normale à la surface du support $\vec{N}$
  - Une composante tangentielle (souvent appelée frottements), $\vec{T}$.



  Quand l'objet glisse sur le support, il est d'usage d'utiliser la loi de Coulomb qui postule la proportionnalité des normes des deux composantes afin d'obtenir une expression pour la composante tangentielle, généralement inconnue :

$$\|\vec{T}\| = \mu.\|\vec{N}\|$$

3 – Lois de Newton

3.1. Énoncés

Dans son ouvrage les *Principia* de 1687, *Isaac Newton* fonde la mécanique « classique » sur 3 lois.

- **Première loi** (principe d'inertie) : il existe des référentiels, dits galiléens, dans lesquels un point matériel libre de toute interaction est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

  Le référentiel terrestre pourra être considéré comme galiléen dans les expériences usuelles pour lesquelles la durée de l'expérience est négligeable devant la période de rotation de la Terre, ou lorsqu'il est évident que l'erreur liée à l'effet de la rotation de la Terre est négligeable devant d'autres erreurs.

  Tout référentiel en translation rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

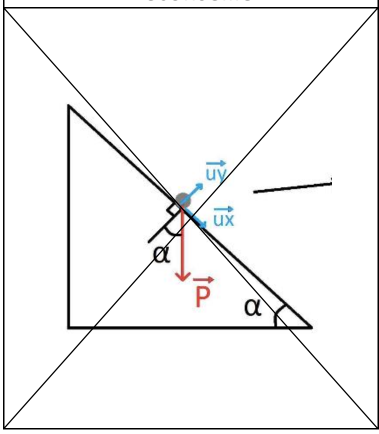
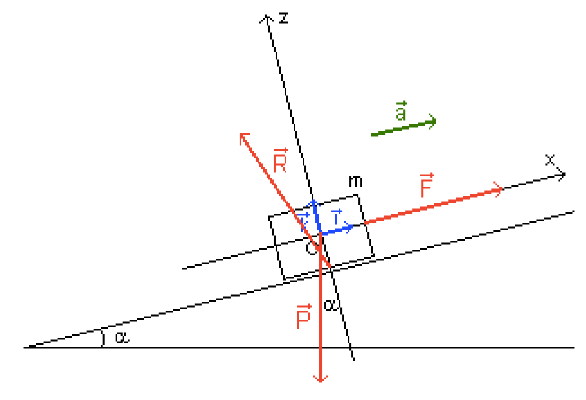
- **Seconde loi** (relation fondamentale de la dynamique) : dans un référentiel galiléen, un point de masse m constante soumis à une résultante de forces $\overrightarrow{F_{ext}}$ est animé d'un mouvement tel que l'accélération $\vec{a}$ du point M vérifie la relation :
$$m\frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = \overrightarrow{F_{ext}}$$

- **Troisième loi** (principe des actions réciproques) : les forces d'interactions réciproques qui s'exercent entre deux corps sont de même intensité, de sens opposés et ont pour direction la droite joignant les deux points d'application.
$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}}$$

3.2. Conseils pratiques pour l'application de la seconde loi de Newton

L'application de la seconde loi de Newton permet de résoudre des problèmes de balistique (détermination de trajectoires), de calculer la norme de certaines forces, d'étudier le mouvement des satellites, etc… Pour toutes ces applications, il est nécessaire de travailler méthodiquement :

1. **Faire un schéma** représentant le **système** à étudier, **que l'on définira précisément**. Si le système met en jeu un angle α quelconque (plan incliné par exemple), éviter de faire le schéma avec un angle proche de 45 ° car les valeurs du sinus et du cosinus sont trop proches et risquent d'être confondues.

Déconseillé	Conseillé
	

2. Préciser le **référentiel d'étude** (en général le référentiel du laboratoire, le référentiel terrestre, ou le référentiel géocentrique dans le cas de l'étude du mouvement des satellites) qui sera supposé galiléen, et représenter **la base de projection orthonormée directe** (cartésienne et/ou polaire) associée sur le schéma.
   - Lorsque le mobile a un mouvement circulaire, il convient de choisir une base polaire.

3. Faire l'inventaire des forces extérieures exercées sur le système à un instant t quelconque en précisant le point d'application, le sens et la direction du vecteur force (bilan des forces) et, dans la mesure du possible, représenter ces forces en couleur sur le schéma.

4. Appliquer la **relation fondamentale de la dynamique**, qui conduit à une relation vectorielle écrite dans le référentiel d'étude (R). Il est ensuite nécessaire de **projeter** cette relation **sur les vecteurs de la base de projection.**

5. Utiliser les différentes relations projetées :
   - soit pour déterminer directement les inconnues du problème (vitesse, force…),
   - soit pour établir les équations différentielles du mouvement à intégrer.

   Les éventuelles constantes d'intégration sont déterminées grâce aux conditions initiales.

4) Travail, puissance et énergie

4.1. Définitions

- **Travail d'une force appliquée à un point matériel**

  Soit une particule ponctuelle M de masse m soumise à une force $\vec{F}$ et subissant un déplacement élémentaire $\overrightarrow{d\ell} = \overrightarrow{dOM}$, à la vitesse $\vec{v}$, entre les instants t et t + dt dans un référentiel galiléen (R_g). Le travail élémentaire de cette force est défini par :

$$\boxed{\delta W(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{d\ell} = \vec{F}.\vec{v}dt}$$

  ⇒ Le travail est nul si la force est perpendiculaire au déplacement ;

  ⇒ Le travail est dit moteur si $\delta W > 0$, résistant si $\delta W < 0$.

  Le travail de la force $\vec{F}$ lors du déplacement du mobile entre les positions A et B s'obtient par intégration :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{d\ell}}$$

  Le travail est une grandeur scalaire algébrique exprimée en **Joule**, et qui dépend a priori du chemin suivi pour le calculer.

- **Force conservative**

  Une **force** sera dite **conservative** si son **travail** est **indépendant du chemin suivi**. Il existe alors une fonction appelée énergie potentielle telle que le travail soit égal à l'**opposé de la variation d'énergie potentielle**. On dit qu'une force conservative dérive d'une énergie potentielle.

$$\boxed{W_{AB}(\overrightarrow{F_{cons}}) = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B)}$$

- **Puissance d'une force**

  La puissance d'une force $\vec{F}$ agissant sur la particule ponctuelle M de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen (R_g) est définie par :

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F}.\vec{v}}$$

  Sa valeur, exprimée en **watt** ($W \equiv J.s^{-1}$), dépend du référentiel choisi.

- **Énergie cinétique d'un point**

  L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen (R_g) est définie par :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

  L'énergie cinétique est une **grandeur scalaire positive**, définie à un instant t donné ; elle est exprimée en **Joule**.

4.2. Théorème de l'énergie cinétique

Soit une particule ponctuelle M de masse m soumise à un ensemble de force $\overrightarrow{F_{ext}}$ dans un référentiel galiléen (R_g) et subissant un déplacement élémentaire à la vitesse $\vec{v}$ entre les instants t et t + dt. La relation fondamentale de la dynamique entre les instants t et t + dt s'écrit :

$$m\frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = \overrightarrow{F_{ext}}$$

La multiplication par $\vec{v}$ de la relation conduit à :

$$m\frac{\overrightarrow{dv}}{dt}.\vec{v} = \overrightarrow{F_{ext}}.\vec{v}$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dt} = \overrightarrow{F_{ext}}.\vec{v} = \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)$$

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right).dt = \delta W\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)$$

D'où, sous forme intégrée, le théorème de l'énergie cinétique : **dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un mobile lors de son déplacement entre les points A et B est égale à la somme des travaux des forces extérieures.**

$$\boxed{\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)}$$

4.3. Théorème de l'énergie mécanique

Si parmi les forces auxquelles est soumis le système il existe des forces conservatives, alors le travail total peut être décomposé entre travail des forces conservatives et travail des forces non conservatives. Ainsi, il est possible de faire apparaître un terme de variation d'énergie potentielle :

$$\Delta E_c = W\left(\overrightarrow{F_{\substack{ext\\cons}}}\right) + W\left(\overrightarrow{F_{\substack{ext\\non\ cons}}}\right)$$

$$\Delta E_c = -\Delta E_p + W\left(\overrightarrow{F_{\substack{ext\\non\ cons}}}\right)$$

$$\Delta E_c + \Delta E_p = W\left(\overrightarrow{F_{\substack{ext\\non\ cons}}}\right)$$

D'où le théorème de l'énergie mécanique : **dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un mobile lors de son déplacement entre les points A et B est égale à la somme des travaux des forces extérieures non conservatives.**

$$\boxed{\Delta E_m = W\left(\overrightarrow{F_{\substack{ext\\non\ cons}}}\right)}$$

Conseil méthode :

Avant d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique ou de l'énergie mécanique, préciser les positions entre lesquelles le mouvement a été considéré. Ces théorèmes sont très utiles pour :

- $\Rightarrow$ Déterminer la norme de la vitesse en un point donné pour un système conservatif (c'est-à-dire soumis uniquement à des forces conservatives et/ou perpendiculaires au déplacement) dont on connaît l'état initial ;
- $\Rightarrow$ Evaluer le travail d'une force de frottement entre deux points pour lesquels les vitesses sont connues.