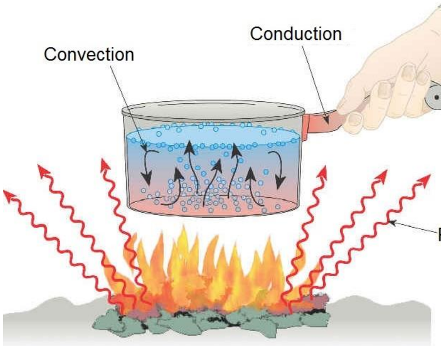
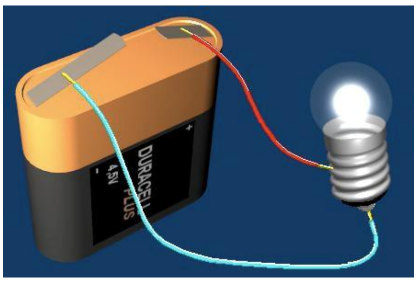
1 – Introduction et Outils

1 – Phénomènes de transport

L'**inhomogénéité spatiale** d'une grandeur intensive G place un système dans un état hors-équilibre. Cette situation provoque le **transport** d'une grandeur extensive A pour rétablir l'homogénéité.

CAUSE		CONSEQUENCE
Inhomogénéité spatiale de G (intensive)	→	Transport de A (extensive)
Caractérisée par le vecteur **gradient**		Caractérisé par un **flux (débit)** de A

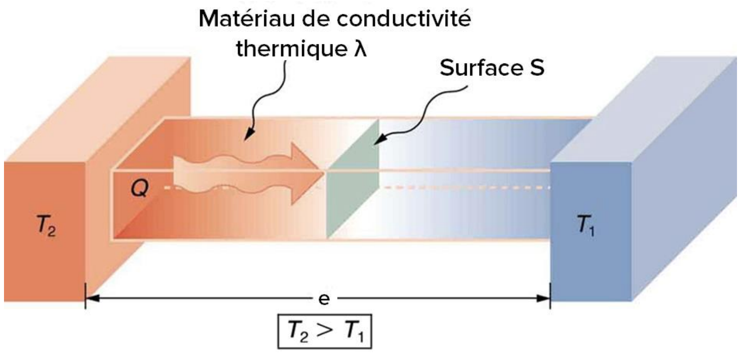
	Exemple	Gdr intensive inhomogène	Gdr extensive transportée
Conduction thermique			
Diffusion de particules			
Conduction électrique			

Ce transport peut s'opérer :

- **avec** un **mouvement macroscopique** du milieu matériel : **convection**,
- ou **sans** mouvement macroscopique du milieu matériel : **diffusion**.

Si la cause du transport n'évolue pas, le régime est dit **permanent**. Si en plus, les grandeurs intensives sont indépendantes du temps, le régime est dit **stationnaire permanent**.

Exemple :
Une barre métallique, initialement à 20 °C, est mise en contact de deux thermostats, l'un à T_2 = 80 °C, l'autre à T_1 = 30 °C.



D'abord, un régime transitoire se met en place et marque l'adaptation du matériau à la perturbation qui lui est imposée. Une fois le régime transitoire terminé, s'installe un régime permanent.
Ici, le régime permanent sera stationnaire (c'est-à-dire que la température en un point quelconque du matériau est indépendante du temps) puisque la différence de température imposée aux extrémités du matériau n'évolue pas dans le temps.

2 – Caractériser l'inhomogénéité spatiale : le vecteur gradient

2.1. Définition

L'espace est muni d'un repère orthonormé cartésien $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Le vecteur gradient de la fonction *f*(x,y,z) est défini en coordonnées cartésiennes par :

Expression du vecteur gradient de *f* en coordonnées cartésiennes :
Unité :

2.2. Propriétés du vecteur gradient

a. Expression de la différentielle de f

Soient deux points infiniment proches $M(x, y, z)$ et $M(x + dx, y + dy, z + dz)$. Le déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ du point M au point M' est tel que :

$$d\vec{\ell} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$$

Expression d'un déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ en coordonnées cartésiennes :

Le produit scalaire du vecteur gradient par le vecteur déplacement élémentaire conduit à :

Expression de la différentielle de *f* en coordonnées cartésiennes :

b. Orientation dans l'espace du vecteur gradient

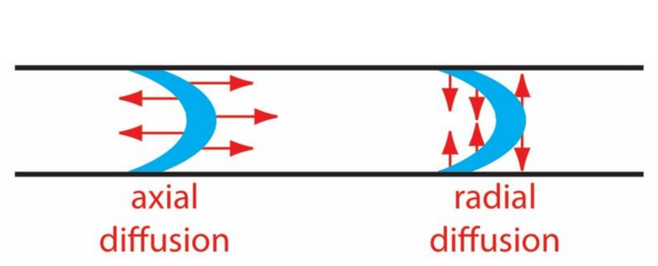
Soient deux points infiniment proches $M(x, y, z)$ et $M(x + dx, y + dy, z + dz)$ tels que *f* prend la même valeur en ces deux points. Lors du déplacement élémentaire du point M au point M', *f* ne varie pas. Ainsi, pendant ce déplacement, d*f* = 0.

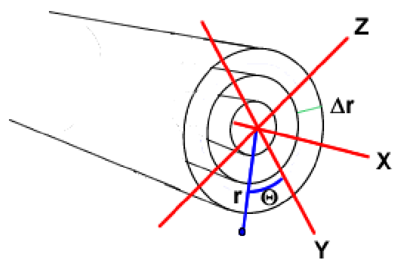
Lors d'un déplacement iso-*f* : $0 = \overrightarrow{grad}\, f . d\vec{\ell}$. On en conclut :

Direction du vecteur gradient :
Sens du vecteur gradient :

2.3. Expression simplifiée du vecteur gradient pour des systèmes unidimensionnels

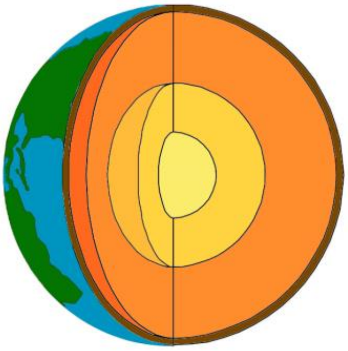
Dans le cadre du programme, les phénomènes étudiés sont unidimensionnels : les inhomognénéités spatiales de la grandeur intensive G peuvent être traduites au moyen d'une seule coordonnée, ce qui limite les situations étudiées à deux cas :





Hétérogénéité le long d'un axe	Diffusion axiale	Variable x (ou z)	
Hétérogénéité autour d'un axe ou d'un point	Diffusion radiale	Variable r	

Exemples en diffusion thermique :

	Diffusion axiale ou radiale ?	**Géométrie ?**
		
		
		

3 – Caractériser le transport : flux d'une grandeur intensive

3.1. Définition

Le flux Φ de la grandeur extensive A à travers la surface Σ est défini comme la quantité de A traversant S par unité de temps.

Flux de la grandeur extensive A à travers la surface Σ :

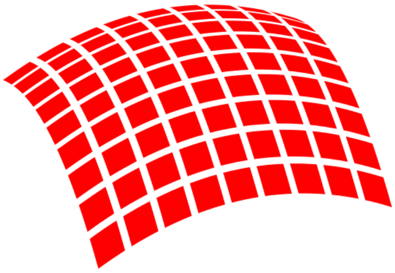
$$\Phi_A = \frac{\delta A}{dt}$$

δA :

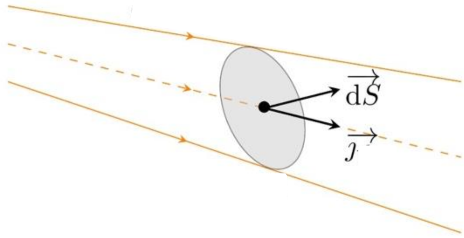
Unité :

3.2. Outil de description locale : vecteur densité surfacique de flux

La limite de cette définition est qu'elle prend en compte l'ensemble de la surface Σ, d'aire S. Elle ne permet donc pas une description locale du transport. A cet effet, le vecteur densité surfacique de flux $\overrightarrow{j_A}$ est introduit :



Découpage de la surface globale S
en surfaces élémentaires d'aires dS



Bilan local :
Vecteur densité surfacique $\overrightarrow{j_A}$

Flux élémentaire de la grandeur extensive A à travers la surface élémentaire d'aire dS **:**

$$\mathrm{d}\Phi_\mathrm{A} = \vec{j}_A.\overrightarrow{dS} = \overrightarrow{j_A}.\vec{n}\, dS$$

Propriétés du vecteur densité surfacique de flux de A, $\overrightarrow{j_A}$:

- **Direction :**
- **Sens :**

Dans toutes les situations abordées par le programme, le vecteur densité surfacique de flux de A est normal à la surface Σ traversée. On notera plus simplement : $\mathrm{d}\Phi_\mathrm{A} = j_A.dS$

Le flux global s'obtient en sommant les flux élémentaires :

$$\Phi_\mathrm{A} = \frac{\delta \mathrm{A}}{\mathrm{dt}} = \iint j_A.dS$$

Par ailleurs, si la densité surfacique de flux de A est uniforme sur la surface Σ, alors il peut être sorti de l'intégrale. C'est là encore le cadre du programme :

$$\Phi_\mathrm{A} = \frac{\delta \mathrm{A}}{\mathrm{dt}} = j_A.\iint dS = j_A.S$$

Flux de la grandeur extensive A à travers la surface Σ d'aire S dans le cadre du programme :

$$\boxed{\Phi_\mathrm{A} = \frac{\delta \mathrm{A}}{\mathrm{dt}} = j_A.S}$$

En symétrie axiale :

En symétrie radiale :

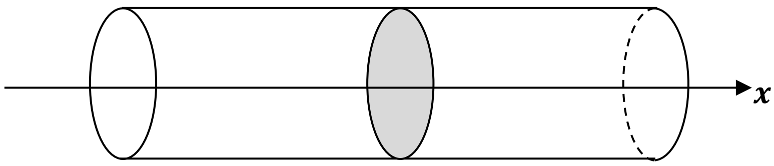
Quantité de A traversant la surface S pendant la durée dt :

Rappels de formules de surfaces :

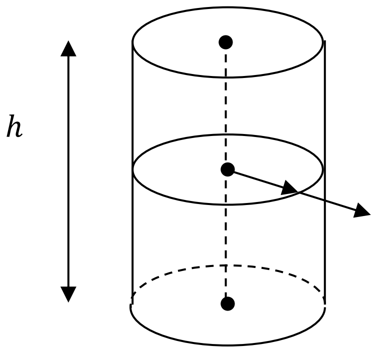
Comme le flux de A à travers la surface Σ s'écrit $\Phi_{\text{A}} = j_A . S$, il est important de savoir calculer des surfaces.

Dans chaque cas, décrire la surface traversée par le flux et écrire la formule permettant le calcul de surface S

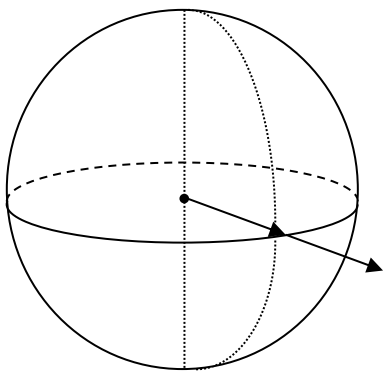
Diffusion axiale :



Diffusion radiale en symétrie cylindrique :



Diffusion radiale en symétrie sphérique :



4 – Méthode générale des bilans de la grandeur extensive A

L'inhomogénéité de la grandeur intensive G ayant entraîné un transport de A, il est d'usage pour rendre compte du phénomène d'opérer un bilan de la grandeur extensive A dans un volume donné, pendant une durée donnée.

La méthode générale qui sera suivie est la suivante :

1. ***Identifier l'inhomogénéité pour définir de la grandeur extensive A dont on réalise le bilan :***

Gradient de concentration	Flux de particules
Gradient de température	Flux d'énergie (= puissance thermique diffusée)
Gradient de potentiel	Flux de charges (= intensité électrique)

---

2. ***Identifier la direction du gradient pour définir le volume élémentaire d'étude :***

Gradient axial (x) Volume de matériau compris entre les abscisses x et x+dx

Volume étudié δV = S(x).dx

Gradient radial (r) Volume de matériau compris entre les rayons r et r+dr

Volume étudié δV = S(r).dr

---

3. ***Définir la durée de l'étude :***

Le bilan est réalisé entre les instants t et t+dt

---

4. ***Exprimer la variation infinitésimale de A pendant la durée de l'étude :***

- ***Variation dans le temps (variation = final – initial)***

$$dA = A(t+dt) - A(t) = \frac{\partial A}{\partial t} dt$$

- ***Variation due au phénomène de transport :***

$$dA = \delta A_{\substack{entré \\ pdt\ dt}} - \delta A_{\substack{sorti \\ pdt\ dt}} + \delta A_{\substack{créé \\ pdt\ dt}} - \delta A_{\substack{disparu \\ pdt\ dt}}$$

Pour l'entrée et la sortie, on utilise les flux :

$$\delta A_{\substack{entré \\ pdt\ dt}} = \phi_{A,entrée} \cdot dt$$
$$\delta A_{\substack{sorti \\ pdt\ dt}} = \phi_{A,sortie} \cdot dt$$

---

5. ***En général, se placer dans l'hypothèse d'un régime stationnaire (cadre du programme) :***

$$Régime\ stationnaire \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad dA = 0$$

---

6. ***Résoudre l'équation différentielle obtenue pour obtenir l'expression de la grandeur intensive G.***